D. J. 克莱门茨
B. D. O. 安德森 著

奇异最优控制

线性二次问题

科学出版社

奇异最优控制

线性二次问题

D. J. 克莱门茨
B. D. O. 安德森 著

王肇明 译

郑应平 校

科学出版社

内 容 简 介

本书讨论的是奇异线性二次最优控制问题，论证严谨，内容丰富．该书首先介绍奇异最优控制问题的由来及其历史发展概况；其次使用鲁棒性概念研究了奇异线性二次最优控制的算法；接着引进了常值方向，并讨论了离散时间的奇异最优控制问题；最后提出了尚待解决的问题．本书可供从事自动控制的科研人员及高等院校有关专业的师生参考．

D. J. Clements B. D. O. Anderson

SINGULAR OPTIMAL CONTROL

The Linear-Quadratic Problem

Springer-Verlag 1978

奇异最优控制

线性二次问题

D. J. 克莱门茨 著
B. D. O. 安德森
王肇明 译
郑应平 校

责任编辑 刘兴民 袁放尧

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年10月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1985年10月第一次印刷 印张：4 1/4
印数：0001—5,200 字数：92,000

统一书号：15031・681
本社书号：4594・15—8

定价：1.05 元

著者为中译本写的序

1984 年，我曾荣幸地访问了中国的一些院校和研究所，其中包括中国科学院的系统科学研究所、山东大学和复旦大学．在这些院校和研究所中，我报告了本书所涉及的内容．在奇异控制领域中工作的中国科学家和工程师们，在这方面表现出浓厚的兴趣和丰富的知识，因此，肯定对许多人来说这本书并没有多少新的东西．然而，我相信它对某些读者仍会是有益的．我为它能作为我们两国友好交流的一个具体范例而感到十分高兴．

B. D. O. 安德森

1984 年 12 月于澳大利亚，堪培拉

序　言

《奇异最优控制——线性二次问题》一书是供从事奇异最优控制方法研究的高年级研究生、研究人员和其他使用这一方法的人员阅读的一本专著．它假定读者已经熟悉标准的线性二次调节器问题，并对线性系统理论有相当的了解．

最近，在线性二次奇异控制方面取得了许多进展．这本书介绍的就是有关这方面的最新成就．同时，本书力图用统一的观点把初看起来互不相关的有关奇异最优控制的各种研究方法联系起来．

目　　录

第一章　奇异线性二次最优控制的概述

1.1　问题的提出

本书讨论的是奇异线性二次最优控制问题. 在本章的第一节里,我们要阐明这些问题的由来,而在其余各节中将阐述它的历史发展概况，以及说明本书将怎样综述当前有关这方面的主要内容.

我们首先复习一下线性二次问题的概念（不管它是否是奇异的），接着再考察奇异控制问题的概念(不管它是否是线性二次的),然后再把这两个概念联系到一起.

线性二次最优控制问题，不论它是奇异的，还是非奇异的,通常在以下两种不同的情况下发生. 第一种情况,给定线性系统

$$\dot{x} = F(t)X + G(t)u$$

和 (1.1)

$$x(t_0) = x_0$$

这里 x_0 是确定的. 同时还给定一个 u 和 x 的二次性能指标；对于线性调节问题,这个性能指标可以是

$$V[x_0, u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f}[x'Q(t)x + u'R(t)u]\,dt + x'(t_f)Sx(t_f) \tag{1.2}$$

通常这里的 Q, R 和 S 是对称的，Q 和 S 是非负定的,而 R 是正定的. 当然,问题是要寻找一个控制 $u(\cdot)$, 使 $V[x_0, u(\cdot)]$ 取极小值. Kalman 的开创性工作(参阅文献[1,2]) 已经引

起了对这类问题的广泛研究（参阅文献[3，4]）．任何性能指标通常都反映了对于控制的品质或质量的某种物理上的要求，而由满足上述限制的 Q，R 和 S 所组成的(1.2)式经常是有明确的物理意义的．然而，对于 Q，R 和 S 的限制也可以放松一些，在(1.2)式的被积函数中还可以出现交叉项 $2x'H(t)u$．这样一来，就得到了线性二次控制问题的最一般的形式．

第二种情况，当我们用摄动方法(二次变分原理)来分析一般的最优控制问题时，也会得到线性二次问题，这时原来的系统可能不是线性的，而原来的性能指标也可能不是二次的．对于一个一般的最优控制问题，给定了某个初始状态和相应的最优控制，要问初始状态有了一个微小的改变之后，为了保持最优性，应该怎样调整原来的最优控制呢；这个控制的调整量的近似，乃是某个线性二次问题的解．在文献[5]中给出了从一般问题到线性二次问题的摄动步骤，包括具体的计算细节在内．

奇异最优控制问题是在以下情况下产生的．对于任何最优控制问题，无论是奇异的或非奇异的，使 Hamilton 函数 $\mathscr{H}$ 取极值的弧被定义为极值弧．如果此要求不能使控制向量表示成状态向量和协状态向量的函数，那么，问题就是奇异的．在 $\mathscr{H}_u$ 为零且 $\mathscr{H}_{uu}$ 是奇异时，就会出现这种情况．

Johnson 和 Gibson 在文献[6]中对某些问题证明了最优奇异解的存在性；在文献[5，7—9]中提供了另外一些例子，而文献[10]这本书对此作了极好的综述．在大多数奇异问题中，Hamilton 函数对 $u(\cdot)$ 是线性的；当系统方程和损耗函数都只包含 $u(\cdot)$ 的线性项时，就是这样的．

直接把奇异和线性二次这两个概念结合到一起就得到了奇异线性二次问题这个概念．一个线性二次问题的奇异性等

价于性能指标的被积函数 $x'Qx + 2u'Hx + u'Ru$ 中矩阵 R 的奇异性. 奇异的线性二次问题可以是直接提出的，也可以作为对一般的最优控制问题应用二次变分原理的结果而产生的.

在考虑任何最优控制问题时，都会产生许多问题. 例如：问题是否可解？或能否选择适当的控制，而使性能指标达到任何指定的负值？如果问题有解，那么，又怎样才能算得出性能指标的最优值和最优控制呢？

读者知道，对于非奇异的线性二次问题已有相当好的解法(参阅文献 [5, 11—14]). 这些解法大多涉及到一个含有 R^{-1} 的矩阵 Riccati 微分方程. 正如文献[10]中所指出的，奇异问题的解法大体上是在最近一段时期内才得到的，有些还不很成熟. 在下一节中我们来讨论那些已经肯定了的有关奇异线性二次问题的结果.

1.2 奇异线性二次控制的历史概况

至今，至少有四种互不相干的研究奇异线性二次问题的方法. 在这一节中将分别加以说明.

第一种方法是在 Goh[15,16], Kelley[9,17,18] 和 Robbins[19] 的工作中给出的；这一方面的工作尚未终结，仍有新的成果在继续发表[20]. 他们的工作主要(但不是唯一的)致力于问题的计算方面，而文章中反复讨论的主题是要用一个非奇异线性二次控制问题去代替奇异线性二次控制问题，且能使得这个非奇异问题的解在一定程度上决定了原来的奇异问题的解.

第二种方法是由 Jacobson 的工作[21,22]所提供的. 而后 Anderson[23] 进行了推广，并由 Molinari[24] 而臻完善. 这里强调的是寻找奇异线性二次问题可解性的必要和（有时是不一

样的)充分条件. 当然,有些条件(例如 $R \geqslant 0$)是很早就知道了的;在文献[21—24]中所给出的条件的特点在于它们包括了以前所给出的所有的条件,而且当必要条件和充分条件不相一致时,其差异也是十分微小的. 事实上,最近的工作[25,26]已在逐渐地消除这种差别.

第三种方法是正则化方法,也就是利用摄动方法把一个奇异问题化成为相应的非奇异问题,这种摄动应使非奇异问题的解在某种意义上能逼近原来的奇异问题的解. 这个思想主要是由 Jacobson 提出的(参阅文献[27,28]),在文献[28]中还尽力导出问题可解性的充分必要条件. 所采用的正则化方法是一个很简单的方法,这就是在性能指标的被积函数中加上一项 $\varepsilon u'u$,其中 ε 是一个正的小量. 其效果是对最优性能指标作了一个微小摄动;然而,在最优控制中这种摄动的影响可能是很难控制住的(参阅文献[29]).

本书将很少涉及正则化方法,这并不是因为这个方法所固有的缺陷,而是因为一旦得到了一个非奇异问题,就不再有什么特殊的困难了. 而且,通过对 $\varepsilon \to 0$ 时的一系列正则化问题的研究所得到的那些有关奇异问题的理论性条件大体上可以通过其他方法更为简便地得到.(当然,对特定的问题而言,用这样的一个序列来推出最优控制的方法在计算上也是很有吸引力的.)

第四种方法与其说是研究奇异线性二次问题的方法,不如说是另一个有关的研究方向. 在无源网络的综合和协方差因式分解中,有些问题是和奇异线性二次控制问题有联系的. 更确切地说,最近才发现与研究控制问题有关的一些矩阵微分和积分不等式已经被用于研究网络和协方差的问题中了[30,31].

作为一般的评论,应该指出,经验表明向量控制问题经常

要比标量控制问题困难得多．本书考虑的正是向量控制的情形．

1.3 本书的目的

本书主要介绍与奇异线性二次问题有关的存在性和计算方法问题．然而，在这一过程中，我们还要说明怎样才能把上一节中所讲过的四种方法结合起来，以便形成一个统一的理论．

这样作了之后，我们将把许多有关的思想推广到离散时间的问题中去．下一节将对此作进一步的说明．

1.4 各章的梗概

请读者注意在这一节中，我们只对本书要研究的问题的背景作一简要的说明；详细的介绍将放在每一章的引言中．

第二章的中心议题是线性二次极小化问题的鲁棒性．我们先不去讲述这一章的具体内容，而来谈谈为什么要如此安排．

在研究二次变分问题时，通常有关的线性二次问题中的初始状态总是零，而且我们想要寻求的是对于所有控制$u(\cdot)$，性能指标均为非负的充分和必要条件． 在可控性假定下，可以得到相应的必要条件，没有可控性假定，可以得到相应的充分条件(参考文献[21—24])．这些必要条件和充分条件是很相似的，但又不完全相同；这个充分条件基本上是非奇异问题中的 Riccati 方程在$[t_0, t_f]$上没有逃逸时间的条件在奇异情况下的推广。

接着提出的问题是如何弥合有关非负性要求的必要条件

和充分条件之间的细微差别．问题的解决是十分简单的：只要稍微改变一下问题的提法．我们并不寻找非负性的必要充分条件，而寻找对于所有初始状态、最优性能指标均为有限的必要充分条件．也就是说，要求极小化问题（或者，更一般地说，有下确界的问题），不仅对零初始状态，而且对于所有接近于零的初始状态（由于问题的线性二次性质，因而也就对于所有在幅度上没有限制的初始状态）都是有解的．我们认为一个实际的控制系统的任何合理的模型，如果对零初始条件有解，那么，对它邻域内的任何初始条件也应有解．否则，当系统的初始条件有一个任意小的改变时，控制这系统的最优指标可能从一个有限值变为$-\infty$．显然，这是不符合实际情况的．

在第二章中首先使用了鲁棒性的概念来比较简单地推导出线性二次问题的最优性能指标对于所有的初始状态均为有限的充分条件和必要条件，而且这些条件是相同的．然而，一旦由此引进了鲁棒性的概念，我们就要进一步考察这种概念对其他各种鲁棒性，例如关于初始时间、终端时间、终端加权量以及初始和终端约束的鲁棒性的适用程度．

实际上，关于初始时间的鲁棒性概念在别的地方已经使用过了，例如在文献[14]中被称为“可延拓性”．它证明了一个极小化问题关于初始时间是鲁棒的，当且仅当它对于初始状态是鲁棒的．

第二章的其余部分讨论的是终端有约束的问题．这里再一次研究了存在性问题，并且在鲁棒性的假定下再一次弥合了早先的必要条件和充分条件之间的间隙．这里可能有三种（而不是两种）不那么明显地互相等价的鲁棒性假定：关于终端状态、终端时间以及性能指标中对终端状态的加权矩阵的鲁棒性．

在第二章中，各种条件几乎都是用矩阵积分不等式来表示的，也就是采用了前面提到的研究奇异问题的第二种方法[21-24]所发展起来的形式．这里推导了这些不等式的几个新的性质．有些曾在文献[25,26]中出现过，另一些则是第一次在这里发表．

鉴于第二章讲的是存在性问题，第三章将要讲计算问题，更确切地说，是要讲述检查零初始状态及任意控制下性能指标的非负性的算法，在任意初始状态下计算最优性能指标的值(并在这过程中校核它的存在性)和(或)计算最优控制的算法．这些算法来自前面所述的，研究奇异问题的第一、第二和第四种方法，也就是除了正则化方法以外的所有方法．这表明原来多少不大相干的许多思想有着令人注目的一致性．

遗憾的是，这里存在着一个缺陷．为了实现这些算法，必须作某些平滑性和秩数不变的假定，而这些假定并不总是成立的．

我们把算法的详细说明留到第三章中去讲，这里只是提一下它们的几个基本观点．这些算法是用一个具有较低维控制空间和(或)较低维状态空间的线性二次问题来代替原来的奇异线性二次问题．这个新的问题可以是非奇异的，也可以是奇异的．一系列这样的代换最后将使问题变成或者是零维控制空间的，或者是零维状态空间的，或者是非奇异的．对于这三种情况，问题都是容易解决的，把它的解再反代回去，就可以得到原来奇异问题的解．

在第四章中，定义并讨论了离散时间的奇异问题．从某种观点看来，可以认为对离散时间问题的研究不会带来什么新的东西，因为决定最优指标的 Riccati 差分方程和关于最优控制的公式总是适用的．尽管如此，仍然可以得到许多平行于连续时间的奇异问题的重要结果，包括首先在文献［32—

34] 中引进与研究过的退化方向和常值方向的十分一般的理论。

第五章十分简要地提出了进一步的研究方向。

参 考 文 献

[1] R. E. Kalman, "Contributions to the theory of optimal control", *Bol. Soc. Mat. Mex.* 1960, pp. 102—119.

[2] R. E. Kalman, "The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations", Chapter 16 of Mathematical Optimization Techniques, ed. R. Bellman, University of California Press, 1963.

[3] H. Kwakernaak and R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, New York, 1972.

[4] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, Linear Optimal Control, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

[5] A. E. Bryson and Y. C. Ho, Applied Optimal Control, Blaisdell Publishing Co., Mass., 1969.

[6] C. D. Johnson and J. E. Gibson, "Singular solutions in problems of optimal control", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-8, 1963, pp. 4—15.

[7] W. M. Wonham and C. D. Johnson, " Optimal bang-bang control with quadratic performance index", *Trans. ASME, Series D, J. Bas. Eng.,* Vol. 86, 1964, pp. 107—115.

[8] C. D. Johnson and W. M. Wonham, "On a problem of Letov in optimal control", *Trans. ASME, Series D, J. Bas. Eng.,* Vol. 87, 1965, pp. 81—89.

[9] H. J. Kelley, R. E. Kopp and H. G. Moyer, "Singular Extremals", Chapter 3 in Topics in Optimization, ed. by G. Leitmann, Academic Press, New York, 1967.

[10] D. A. Bell and D. H. Jacobson, Singular Optimal Control Problems, Academic Press, New York, 1975.

[11] I. M. Gelfand and S. W. Fomin, Calculus of Variations, Prentice-Hall, New Jersey, 1963.

[12] J. V. Breakwell, J. L. Speyer and A. E. Bryson, "Optimization and control of nonlinear systems using the second variation", *SIAM J. Control,* Vol. 1, 1963, pp. 193—223.

[13] W. A. Coppel, Disconjugacy, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 220, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[14] J. B. Moore and B. D. O. Anderson, "Extensions of quadratic minimization theory, I: Finite time results", *Int. J. Control,* Vol. 7, 1968, pp. 465—472.

[15] B. S. Goh, "The second variation for the singular Bolza problem", *SIAM J. Control,* Vol. 4, 1966, pp. 309—325.

[16] B. S. Goh, "Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables", *SIAM J. Control,* Vol. 4, 1966, pp. 716—731.

[17] H. J. Kelley, "A second variation test for singular extremals", *AIAA J.,* Vol. 2, 1964, pp. 1380—1382.

[18] H. J. Kelley, "A transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems", *SIAM J. Control,* Vol. 2, 1964, pp. 234—240.

[19] H. M. Robbins, "A generalized Legendre-Clebsch condition for the singular cases of optimal control", *IBM J. Res. Develop.,* Vol. 3, 1967, pp. 361—372.

[20] J. B. Moore, "The singular solutions to a singular quadratic minimization problem", *Int. J. Control,* Vol. 20, 1974, pp. 383—393.

[21] D. H. Jacobson, "Totally singular quadratic minimization problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-16, 1971, pp. 651—658.

[22] J. L. Speyer and D. H. Jacobson, "Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems: a transformation approach", *J. Math. Anal. Appl.,* Vol. 33, 1971, pp. 163—187.

[23] B. D. O. Anderson, "Partially singular linear-quadratic control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-18, 1973, pp. 407—409.

[24] B. P. Molinari, "Nonnegativity of a quadratic functional", *SIAM J. Control,* Vol. 13, 1975, pp. 792—806.

[25] D. J. Clements, B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Matrix inequality solution to linear-quadratic singular control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-22, 1977, pp. 55—57.

[26] D. J. Clements and B. D. O. Anderson, "Transformational solution of singular linearquadratic control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-22, 1977, pp. 57—60.

[27] D. H. Jacobson, S. B. Gershwin and M. M. Lele, "Computation of optimal singular controls", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-15, No. 1, February 1970, pp. 67—73.

[28] D. H. Jacobson and J. L. Speyer, "Necessary and sufficient conditions for singular control problems: a limit approach", *J. Math. Anal. Appl.,* Vol. 34, 1971, pp. 239—266.

[29] R. E. O'Malley, Jr., and A. Jameson, "Singular perturbations and singular arcs-Part I", *IEEE Trans. Automdtic Control,* Vol. AC-20, 1975, pp. 218—226.

[30] B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Synthesis of linear time varying passive networks", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, 1974, pp. 678—687.

[31] B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Spectral factorization of a finite-dimensional nonstationary matrix covariance", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, 1974, pp. 680—692.

[32] R. S. Bucy, D. Rappaport and L. M. Silverman, "Correlated noise filtering and invariant directions of the Riccati equation". *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-15, 1970, pp. 535—540.

[33] D. Rappaport, "Constant directions of the Riccati equation", *Automatica*, Vol. 8, 1972, pp. 175—186.

[34] M. Gevers and T. Kailath, "Constant, predictable and degenerate directions of the discrete-time Riccati equation", *Automatica*, Vol. 9, 1973, pp. 699—711.

第二章 具有鲁棒性的线性二次极小化问题

2.1 引　言

已有一些文章讨论过连续时间的线性二次极小化问题的可解性条件，例如文献[1—7]．最近的工作证实了用含有某个 Riemann-Stieltjes 积分的非负性条件来表征可解性问题的意义．在这个工作中，仍存在着一个多少有些麻烦的问题，这就是必要条件和充分条件之间存在有差异．在这一章中，我们将要介绍这方面的内容，并要指出如何才能消除这些差异．

概括地说，我们发现如果所研究的问题在某种意义上是具有鲁棒性的，也就是若能允许某些或全部有关参数有微小的改变的话，那么，这种差异是可以消除的．如果我们把非鲁棒性问题定性地当作是病态的情形(虽然严格地讲，或者定量地讲，它们可以是适定的)，我们将认为对于正常的问题是没有这种差异的．

在鲁棒性的研究中，我们是怎样来改变参数的呢？其回答多少与要处理的问题有关．对于自由端点问题，可以让初始时刻有一个改变量，而在把这些条件用于零初始状态的情况下，可让初始状态自零处有一个偏离．对于端点受约束的问题，可以让终端时刻有一个改变量，可以利用罚函数方法，也可以将终端状态限制在一点上的约束放松为将终端状态限制在一个以该点为中心的小球之内．对于这样两类问题，还可以考虑改变决定系统和性能指标的矩阵的参数(然而，对于

最后的一点我们并不打算作深入的研究，因为当即遇到的一个主要困难在于需要判断现在为零的那些量中，在一般的参数变化下,哪些应该保持为零,而哪些应该不再为零). 总之，在这一章中，要研究一系列的鲁棒性问题. 我们的许多结论是沿着这样一条线索来安排的，也就是若存在某种鲁棒性的话,那么,另一种鲁棒性也就自动成立了.

本章的梗概如下. 在第二节中，研究的是初始状态和终端状态有任意约束的线性二次问题. 我们将要指出，如果约束是可达的,那么,最优性能指标是决定初始状态和终端状态的那些独立变量的二次型. 以后各节将用到这一结论的各种形式. 在第三节中，研究的是具有任意确定的初始状态和自由的终端状态的问题. 我们的主要结论是两种类型的鲁棒性(关于初始状态与关于初始时间的鲁棒性) 和含有 Riemann-Stieltjes 积分不等式的一个条件之间是等价的. 在第四节中，我们讨论了端点有约束的问题; 利用罚函数给出了鲁棒性的另外一种形式，大量的工作将涉及到证明这种新的鲁棒性等价于具有终端时间或终端状态的鲁棒性; 且等价于一个 Riemann-Stieltjes 积分不等式条件. 最后,在第五节中,我们研究了第三,四节中的 Riemann-Stieltjes 不等式的极值解，以及这些极值解和最优化问题之间的关系. 第六节是总结性的说明.

2.2 最优性能指标的二次性质

考虑系统

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_f \tag{2.1}$$

它在初始状态与终端状态可能有各种约束，也就是对于两个确定的(有时可能消失)常数矩阵 D_0, E_0，有

$$D_0x(t_0)=\eta_0 \quad E_0x(t_0)=0 \tag{2.2}$$

对于控制，则要求它能使

$$D_fx(t_f)=\eta_f \ E_fx(t_f)=0 \tag{2.3}$$

在(2.2)式和(2.3)式中，D_0，E_0，D_f 和 E_f 是某些确定的常数矩阵，且使(不失一般性) $C_0=[D_0'E_0']'$ 和 $C_f=[D_f'E_f']'$ 是满行秩的. D_0，E_0 等中的一个或几个也可能会消失掉. 向量 η_0 和 η_f 是任意的，但在任何一个给定的问题中是确定的. 最常见的情形是 $D_0=I$，而 E_0，D_f 和 E_f 都消失了(即通常的自由终端状态的问题)，以及 $D_0=I$，E_0 和 D_f 消失，而 $E_f=I$ (即通常的零终端状态的问题).

与(2.1)式—(2.3)式相连系的性能指标为

$$V[x_0,t_0,u(\cdot)]=\int_{t_0}^{t_f}\{x'Q(t)x+2u'H(t)x+u'R(t)u\}dt + x'(t_f)Sx(t_f) \tag{2.4}$$

其中 $x_0=x(t_0)$. 矩阵 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$，$H(\cdot)$，$Q(\cdot)$ 和 $R(\cdot)$ 的维数与(2.1)式和(2.4)式是相容的，而且它们是分段连续的. (这是指矩阵的元素是分段连续的). 矩阵 S 是常数矩阵. 不失一般性，假定 $Q(\cdot)$，$R(\cdot)$ 和 S 是对称的. 还假定控制 $u(\cdot)$ 在 $[t_0,t_f]$ 上是分段连续的. 首先，我们研究 x_0 和 x_f 中的一个或两个都是变化的那一类问题，然后再考虑 t_0 和 t_f 的变化. 一般说来，我们感兴趣的是(2.4)式何时能有有限的下确界.

然而，在这一节中我们致力于给出下确界的泛函形式. 对于每个 x_0 和 $u(\cdot)$，(2.4) 式有一个确定的值. 假设 η_0 和 η_f 是任意给定的，且满足 (2.1) 式—(2.3) 式的 x_0 和 $u(\cdot)$ 存在. 原则上，(2.4)式的值是在 x_0 和 $u(\cdot)$ 由(2.1)式—(2.3)式限定为线性的条件下计算出来的. 一般说来，对于每对 η_0，η_f，将有无限多个满足 (2.1) 式—(2.3)式的 x_0，$u(\cdot)$. 定义

$V^*[\eta_0, \eta_f]$ 为在约束 (2.1) 式—(2.3)式下所得到的 $V[x_0, t_0, u(\cdot)]$ 的值的下确界．在 $D_0 = I$，而 E_0, D_f 和 E_f 消失了的情况下，$V^*[\eta_0, \eta_f]$ 可以简化为 $V^*[x_0]$，这就是通常的自由端点的最优性能指标．

这一节的主要思想是：若对于所有的 η_0 和 η_f，最优性能指标都是有限的，那么，它就是这些量的二次型．以后各节中将用到这一结果的特殊情形．关于存在性和计算方法的研究仍放在以后进行．

在证明这个二次性质之前，我们先考虑一个辅助问题：对于给定的 η_0, η_f，是否总可以找到满足 (2.1) 式 —(2.3) 式的 $x(t_0)$ 和 $u(\cdot)$ 呢？对于某些特殊情形，是很容易得到答案的．如果 D_0 和 E_0 消失了，也就是 $x(t_0)$ 是自由的，那么，必定存在一个 $x(t_0)$ 和 $u(\cdot)$，使得对于任何的 η_f，都有 $D_f x(t_f) = \eta_f$，$E_f x(t_f) = 0$．(因为 $[D_f' E_f']'$ 是满行秩的，所以，对于 $x(t_f)$ 的约束不可能是不相容的)． 另一方面，若 $D_0 = I$，E_0 和 D_f 消失了，而 $E_f = I$，这就要求控制能使状态变量从任意的 $x(t_0) = \eta_0$ 转移到 $x(t_f) = 0$，显然，这就要求具有某种可控性条件．下面给出精确的条件．

引理 II.2.1 令 $V^*[\eta_0 \eta_f]$ 表示 $V[x(t_0), t_0, u(\cdot)]$（由 (2.4) 式所定义)在 (2.1) 式 —(2.3) 式的条件下的下确界，那么，对于所有的 η_0, η_f，都有 $V^*[\eta_0, \eta_f] < \infty$（这等价于对于任意的 η_0, η_f，(2.1) 式 —(2.3) 式是可达的)，当且仅当

$$\text{Range}\left\{\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \vdots\, C_f \Phi(t_f, t_0) C_0' (C_0 C_0')^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \subset \text{Range}\{C_f[\Phi(t_f, t_0) K \,\vdots\, W]\} \tag{2.5}$$

其中 K 是以 C_0 的零空间 $N(C_0)$ 的基为列的矩阵，而 W 是可控性矩阵

$$W = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)G(\tau)G'(\tau)\Phi'(t_f, \tau)d\tau$$

证明 必要性：对于任意的 $u(\cdot)$，必存在某个 α，使 $\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau$ 具有 $W\alpha$ 的形式（见参考文献 [8]，第 75 页），另外，存在某个 β，使任何满足 $C_0x(t_0) = [\eta_0'0]'$ 的 $x(t_0)$ 可以写成 $C_0'(C_0C_0')^{-1}[\eta_0'0]' + K\beta$. 现在用 C_f 左乘基本方程

$$x(t_f) = \Phi(t_f, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

可知必存在某个 α 和 β，使

$$\begin{bmatrix} \eta_f \\ 0 \end{bmatrix} - C_f\Phi(t_f, t_0)C_0'(C_0C_0')^{-1}\begin{bmatrix} \eta_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= C_f\Phi(t_f, t_0)K\beta + C_fW\alpha \tag{2.6}$$

在给定了(2.1)和(2.2)后，为了使(2.3)是可达的，必定存在 α 和 β 满足(2.6)式. 为了使对于所有的 η_0 和 η_f 都存在这样的 α 和 β，(2.5) 式一定成立.

充分性：对于给定的 η_f, η_0，鉴于(2.5)式，可以选取 α, β，使之满足(2.6)式. 取 $u(t) = G'(t)\Phi'(t_f, t)\alpha$ 和 $x(t_0) = C_0'(C_0C_0')^{-1}[\eta_0'0]'$. 那么，(2.2)和(2.3)式同时成立. 引理证毕.

评注 2.1 1. 若 $x(t_0)$ 是任意确定的，也就是在 $D_0 = I$，而 E_0 和 D_f 消失了的情况下，引理的条件等价于 E_fWE_f' 是正定的，这在文献 [4] 中应用过. 无论 D_0 等取什么值，C_fWC_f' 正定必定能导致(2.5)式成立.

2. $V^*[\eta_0, \eta_f] > -\infty$ 是否成立的问题完全不同于 $V^*[\eta_0, \eta_f] < \infty$ 是否成立. 这个问题将在以后各节中讨论（要回答这个问题还是很困难的）.

为了建立 $V^*[\eta_0, \eta_f]$ 的二次性质，将用到二次函数的以

下特性．类似的特性已经在另外一些研究线性二次问题的工作中用到过[4,9]．

引理 II. 2.2 令 $K(\cdot)$ 是 n 维向量的标量函数．那么，$K(\cdot)$ 是二次的，也就是对于某个对称的矩阵 P，有 $K(x)=x'Px$，当且仅当对于所有的标量 λ 和 n 维向量 x_1, x_2，有

$$\begin{aligned} &K(\lambda x_1) = \lambda^2 K(x_1) \\ &K(x_1 + x_2) + K(x_1 - x_2) = 2K(x_1) + 2K(x_2) \\ &K(x_1 + \lambda x_2) - K(x_1 - \lambda x_2) = \lambda K(x_1 + x_2) \\ &\quad - \lambda K(x_1 - x_2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

证明 结论的"仅当"部分是容易验证的．关于"当"部分的证明如下．我们将在以后证明由式 (2.7) 就可以推出

$$\begin{aligned} &K(x_1 + x_2) - K(x_1 - x_2) + K(x_1 + x_3) - K(x_1 - x_3) \\ &\qquad = K(x_1 + x_2 + x_3) - K(x_1 - x_2 - x_3) \end{aligned} \tag{2.8}$$

而现在先假定以此作为出发点，令

$$L(x, y) = K(x + y) - K(x - y)$$

于是，(2.8)式可以表示为 $L(x, y_1 + y_2) = L(x, y_1) + L(x, y_2)$，由于 $K(x - y) = K(y - x)$，从 (2.7) 式中的第一个方程可以推出 $L(x,y) = L(y, x)$，而从(2.7)式中的第三个方程可以推出 $L(x,\lambda y) = \lambda L(x,y)$．所以，$L$ 对于 x 和 y 是双线性的． 因此 $L(x, x)$ 是二次型，再注意到 $L(x, x) = K(2x) - K(0) = 4K(x)$ (利用 (2.7) 式中的第一个方程)，$K(x)$ 也是二次的．

现在来证明(2.8)式．从(2.7)式中的第二个方程，有

$$\begin{aligned} &K(x_1 + x_2) + K(x_1 + x_3) = \frac{1}{2}[K(x_2 - x_3) \\ &\qquad + K(2x_1 + x_2 + x_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &K(x_1 - x_2) + K(x_1 - x_3) = \frac{1}{2}[K(2x_1 - x_2 - x_3) \\ &\qquad + K(x_2 - x_3)] \end{aligned}$$

因此

$$K(x_1+x_2)-K(x_1-x_2)+K(x_1+x_3)-K(x_1-x_3)$$
$$+K(x_1-x_2-x_3)-K(x_1+x_2+x_3)$$
$$=\frac{1}{2}[K(2x_1+x_2+x_3)-2K(x_1+x_2+x_3)]$$
$$-\frac{1}{2}[K(2x_1-x_2-x_3)-2K(x_1-x_2-x_3)]$$

这个方程的右边恒等于

$$\frac{1}{2}[K(x_2+x_3+2x_1)-K(x_2+x_3-2x_1)$$
$$-2K(x_2+x_3+x_1)+2K(x_2+x_3-x_1)]$$

利用(2.7)式中的第三个方程，让 $\lambda=2$，上式就变成为零了．因此，(2.8)式成立．

现在来建立 $V^*[\eta_0, \eta_f]$ 的二次性质．

定理 II.2.1 假设对于所有的 η_0 和 η_f，$V^*[\eta_0, \eta_f]$ 存在，那么，存在矩阵 P_{00}，P_{0f}，P_{ff}，使得 $V^*[\eta_0, \eta_f]$ 的表达式为

$$V^*[\eta_0, \eta_f]=[\eta_0' \eta_f']\begin{bmatrix}P_{00} & P_{0f}\\ P_{0f}' & P_{ff}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_f\end{bmatrix} \tag{2.9}$$

证明 根据上面的引理，如果 $V^*[\eta_0, \eta_f]$ 满足以下三个等式

$$V^*[\lambda\eta_0, \lambda\eta_f]=\lambda^2V^*[\eta_0, \eta_f] \tag{2.10}$$

$$V^*[\eta_{01}+\eta_{02}, \eta_{f1}+\eta_{f2}]+V^*[\eta_{01}-\eta_{02}, \eta_{f1}-\eta_{f2}]$$
$$=2V^*[\eta_{01}, \eta_{f1}]+2V^*[\eta_{02}, \eta_{f2}] \tag{2.11}$$

以及

$$V^*[\eta_{01}+\lambda\eta_{02}, \eta_{f1}+\lambda\eta_{f2}]-V^*[\eta_{01}-\lambda\eta_{02}, \eta_{f1}-\lambda\eta_{f2}]$$
$$=\lambda V^*[\eta_{01}+\eta_{02}, \eta_{f1}+\eta_{f2}]-\lambda V^*[\eta_{01}-\eta_{02}, \eta_{f1}-\eta_{f2}] \tag{2.12}$$

则上述结论成立．对于上述每一个等式，其证明方法是很相

似的，都是用反证法；根据(2.4)式中 $V[x(t_0), t_0, u(\cdot)]$ 的二次性质，在(2.10)式—(2.12)式中用 V 代替 V^* 后，这些方程还是成立的．我们将只证明(2.12)式，它比(2.10)式和(2.11)式要稍微困难些．

当 $\lambda = 0, \pm 1$ 时，第三个等式显然是成立的；若 $\lambda > 0$ 时此式成立，那么，很容易推广到 $\lambda < 0$ 的情形．所以，假设 $\lambda > 0$，且 $\lambda \neq 1$．

假设 $u_i(\cdot)$ $(i = 1, 2)$ 是用 η_{0i}，$\eta_{fi}(i = 1, 2)$ 代替相应的 η_0，η_f 以后，使约束(2.1)式—(2.3)式得到满足的任何一个控制．那么，由于(2.1)式—(2.3)式的线性性质，$u_1 + \mu u_2$ 将必定满足用 $\eta_{01} + \mu\eta_{02}$，$\eta_{f1} + \mu\eta_{f2}$ 代替 η_0，η_f 以后的 (2.1)式—(2.3)式．根据性能指标(2.4)式的二次性质，容易验证

$$
\begin{aligned}
&V[x_{01} + \lambda x_{02}, t_0, u_1 + \lambda u_2] + \lambda V[x_{01} - x_{02}, t_0, u_1 - u_2] \\
&\quad = \lambda V[x_{01} + x_{02}, t_0, u_1 + u_2] + V[x_{01} - \lambda x_{02}, t_0, u_1 - \lambda u_2]
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$，选取 $u_3(\cdot)$ 和 $u_4(\cdot)$，使得

$$
\begin{aligned}
&V[x_{01} + x_{02}, t_0, u_3] \leqslant V^*[\eta_{01} + \eta_{02}, \eta_{f1} + \eta_{f2}] + \varepsilon \\
&V[x_{01} - \lambda x_{02}, t_0, u_4] \leqslant V^*[\eta_{01} - \lambda\eta_{02}, \eta_{f1} - \lambda\eta_{f2}] + \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

而且，u_3 满足用 $\eta_{01} + \eta_{02}$，$\eta_{f1} + \eta_{f2}$ 代替 η_0，η_f 后的 (2.1)式—(2.3)式，而 u_4 满足用 $\eta_{01} - \lambda\eta_{02}$，$\eta_{f1} - \lambda\eta_{f2}$ 代替 η_0，η_f 后的(2.1)式—(2.3)式．令 u_1，u_2 为

$$
u_1 + u_2 = u_3
$$

$$
u_1 - \lambda u_2 = u_4
$$

于是（根据线性性质）$u_1 + \lambda u_2$ 和 $u_1 - u_2$ 分别对于 $\eta_{01} + \lambda\eta_{02}$，$\eta_{f1} + \lambda\eta_{f2}$ 和 $\eta_{01} - \eta_{02}$，$\eta_{f1} - \eta_{f2}$ 满足 (2.1)式—(2.3)式．因此，由方程(2.13)和(2.14)可以推出

$$
\begin{aligned}
&V^*[\eta_{01} + \lambda\eta_{02}, \eta_{f1} + \lambda\eta_{f2}] + \lambda V^*[\eta_{01} - \eta_{02}, \eta_{f1} - \eta_{f2}] \\
&\quad \leqslant V[x_{01} + \lambda x_{02}, t_0, u_1 + \lambda u_2]
\end{aligned}
$$

$$+\lambda V[x_{01}-x_{02}, t_0, u_1-u_2]$$
$$\leqslant \lambda V^*[\eta_{01}+\eta_{02}, \eta_{f1}+\eta_{f2}]$$
$$+V^*[\eta_{01}-\lambda\eta_{02}, \eta_{f1}-\lambda\eta_{f2}]+(1+\lambda)\varepsilon$$

用类似的方法可以得出反向的不等式，因为 ε 是任意的，所以就有

$$V^*[\eta_{01}+\lambda\eta_{02}, \eta_{f1}+\lambda\eta_{f2}]+\lambda V^*[\eta_{01}-\eta_{02}, \eta_{f1}-\eta_{f2}]$$
$$=\lambda V^*[\eta_{01}+\eta_{02}, \eta_{f1}+\eta_{f2}]$$
$$+V^*[\eta_{01}-\lambda\eta_{02}, \eta_{f1}-\lambda\eta_{f2}]$$

这就是所要证明的结果.

评注 2.2 在文献[4]中，对于 $D_0=I$，E_0，D_f 和 E_f 消失了的情形(通常的最优控制问题)，在引理 II. 2.1* 的条件之处(这时它消失了)，附加上可控性条件，证明了上述结论的另外一种形式. 最早取消可控性条件的，可能是文献[6].

2.3 关于初始条件的结果和 Riemann-Stieltjes 不等式

在这一节中，我们考虑如下的系统：

$$\dot{x}=F(t)x+G(t)u \quad t_0\leqslant t\leqslant t_f \tag{3.1}$$

其中 $x(t_0)=x_0$ 是预先给定的，$x(\cdot)$ 是 n 维向量，而 $u(\cdot)$ 是 m 维向量. 与(3.1)式相联系的性能指标是

$$V[x_0, t_0, u(\cdot)]=\int_{t_0}^{t_f}[x'Q(t)x+2u'H(t)x+u'R(t)u]dt$$
$$+x'(t_f)Sx(t_f) \tag{3.2}$$

矩阵 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$，$H(\cdot)$，$Q(\cdot)$ 和 $R(\cdot)$ 的维数与(3.1)，(3.2)式是相容的，并且是分段连续的(这就是说矩阵的元素都是分段连续的). 在下一章中，将要求更强的光滑性条件.

矩阵 S 是常数矩阵. 不失一般性,假设 $Q(\cdot)$, $R(\cdot)$ 和 S 都是对称的. 还假设控制 $u(\cdot)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上是分段连续的. 我们把上一节的思想限制在 x_f 是自由的情形;而 x_0 是任意确定的,这就是典型的最优控制问题. 显然 V 和 V^* 都不可能是 $+\infty$. 这里,我们感兴趣的是在什么情况下,(2.2)式具有不是 $-\infty$ 的下确界 $V^*[x_0, t_0]$.

在(3.1)式的约束条件下,判定(3.2)式有有限下确界的问题可根据在 $[t_0, t_f]$ 上, $R(t) > 0$; 在 $[t_0, t_f]$ 上的某点, $R(t)$ 是奇异的,但不恒等于零;或者在 $[t_0, t_f]$ 上, $R(t) = 0$ 而分别称为是非奇异的,部分奇异的,或者完全奇异的. 当然,有有限下确界的一个已知的必要条件是在 $[t_0, t_f]$ 上, $R(\cdot) \geq 0$, 这就是经典的 Legendre-Clebsch 必要条件[10].

非奇异问题比起我们所特别关心的奇异问题要容易得多. 然而,本节的前面一些结果对非奇异问题和奇异问题是同样适用的.

在本书中,我们讨论 $V^*[x_0, t_0]$ 是有限的各种必要条件和充分条件,但其顺序与历史发展相反. 如在这一章中,我们感兴趣的是 $V^*[x_0, t_0]$ 为有限的一般存在性条件,而在第三章里,我们的注意力将转向一个较经典的研究方法,它一方面有局限性,即不能涉及所有问题,但另一方面,它可用来导出最优控制和最优性能指标的某些算法.

如上所述,在整个这一节中,我们都假定 $x(t_f)$ 是自由的,而以后各节将可能对 $x(t_f)$ 的值作某种限制. 然而,读者应该清楚,只要稍作修改,本节的所有结论都可用到端点有约束的情形中去,而这种变化不会涉及那些定义在 t_0 的邻域中的量的性状. 由于本节中的结论几乎都与 t_0 邻域内的情况有关,所以,这种微小的改变从理论上来说也是无关紧要的.

现在,我们来定义符号 $dM(P)$. 令

$$dM(P) = \begin{bmatrix} dP + (PF + F'P + Q)dt & (PG + H)dt \\ (PG + H)'dt & Rdt \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

其中 $P(\cdot)$ 是 $n \times n$ 阶的对称矩阵，其元素具有有界变差．今后的工作将大量地用到以下的不等式：

$$\int_{t_1}^{t_2} [v'(t)\ u'(t)] dM(P) \begin{bmatrix} v(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{3.4}$$

其中 $u(\cdot)$ 是定义在 $[t_1, t_2]$ 上的任意的分段连续的 m 维向量，而 $v(\cdot)$ 是定义在 $[t_1, t_2]$ 上的连续的 n 维向量．这个积分是通常 Riemann-Stieltjes 意义下的积分． 如果对于所有的区间 $[t_1, t_2] \subset I$（在两端点处可以是开的，也可以是闭的）上述不等式成立，那么，我们将认为在区间 I 内，$dM(P) \geqslant 0$，或者说 $dM(P)$ 是非负的．

有了这些预备知识，可以给出极小化问题中有限下确界的存在性与满足终端条件，且在某个区间上有 $dM(P) \geqslant 0$ 的矩阵 P 的存在性之间的已知的重要联系．

关于下面头两个定理可以参考文献 [4]． 稍后再来说明定理 II. 3.1 在某种意义上推广了文献[4]中的主要结果．

定理 II. 3.1 假设对于所有的 $u(\cdot)$，有

$$V[0, t_0, u(\cdot)] \geqslant 0,$$

而且

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) G(\tau) G'(\tau) \Phi(t_1, \tau) d\tau > 0$$

$$\forall t_1 \in (t_0, t_f] \tag{3.5}$$

（因而，从 $x(t_0) = 0$ 出发，在任意时刻 $t_1 > t_0$，所有状态都是可达的）． 这里 $\Phi(\cdot, \cdot)$ 是与 $F(\cdot)$ 相联系的转移矩阵．那么

$$\infty > V^*[x_1, t_1] > -\infty$$

$$\forall x(t_1)=x_1,\ \forall t_1\in(t_0,t_f] \tag{3.6}$$

并且在$(t_0, t_f]$上存在一个具有有界变差的对称矩阵$P(\cdot)$，使得 $P(t_f)\leqslant S$，而且在 $(t_0, t_f]$ 内 $dM(P)\geqslant 0$.

这个定理的证明是通过一系列的引理得到的. 概括地说，办法如下. 首先证明(3.6)式；然后，借助于上节的结果去推断$V^*[x_1,t_1]$是二次型，也就是对某个$P^*(t_1)$有$V^*[x_1, t_1]=x_1'P^*(t_1)x_1$；再证明 $P^*(\cdot)$ 是具有有界变差的，且满足某种具附加限制形式的 $dM(P^*)\geqslant 0$；最后，再取消它的这种限制.

引理 II.3.1 在定理 II.3.1 的假设条件下，对于所有的 $x(t_1)=x_1$ 以及 $t_1\in(t_0, t_f]$，$V^*[x_1, t_1]$ 都是有限的.

证明 对于每个 $x_1=x(t_1)$ 和每个 $t_1\in(t_0,t_f]$，不等式 $\infty > V^*[x_1, t_1]$ 是显然的. 至于不等式的另一边 $V^*[x_1, t_1]>-\infty$，根据可达性条件(3.5)，在 $[t_0, t_1]$ 上存在一个分段连续的控制 $u_r(t)$，使状态变量从 t_0 时的 $x=0$ 到达 t_1 时的 $x=x_1$. 令 $u(t)$ 是任意一个在 $[t_1, t_f]$上分段连续的控制，根据假设条件就有

$$\int_{t_0}^{t_1} q(x_r, u_r)dt+\int_{t_1}^{t_f} q(x,u)dt+x'(t_f)Sx(t_f)\geqslant 0$$

这里 $q(x, u)=x'Qx+2x'Hu+u'Ru$. 显然，它给出 $V[x_1,t_1, u(\cdot)]$ 的一个下界，它也是 $V^*[x_1, t_1]$ 的下界.

根据上述引理和前一节的主要结果，我们知道对于某个 $P^*(t_1)$，以及所有的 x_1，$t_1\in(t_0, t_f]$，有

$$V^*[x_1, t_1]=x_1'P^*(t_1)x_1 \tag{3.7}$$

下面来证明 $P^*(\cdot)$ 的一个不等式，以及它有有界变差的性质.

引理 II.3.2 在定理 II.3.1 的假设条件下，令 $P^*(\cdot)$ 由(3.7)式所定义. 那么，由 $q(x,u)=x'Qx+2x'Hu+u'Ru$，对于所有的 $[t_1, t_2]\subseteq(t_0, t_f]$，和所有的 $x(t_1)=x_1$ 有

$$\int_{t_1}^{t_2} q(x,u)dt + x'(t)P^*(t)x(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \geqslant 0 \qquad (3.8)$$

而 $P^*(\cdot)$ 在 $(t_0, t_f]$ 上有有界变差.

证明 根据(3.7)式,(3.8)式正是最优化原则

$$V^*[x_1, t_1] \leqslant \int_{t_1}^{t_2} q(x, u)dt + V[x_2, t_2]$$

现在,令 $W(t)$ 是方程

$$\dot{W} + WF + F'W + Q = 0 \quad W(t_f) = S \qquad (3.9)$$

在$(t_0, t_f]$上的解, $x(t_1)$是任意的, $u(\cdot)$在 $[t_1, t_2]$ 上等于零. 则

$$\int_{t_1}^{t_2} q(x, 0)dt = -x'(t)W(t)x(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$$

注意到 $x(t_2) = \Phi(t_2, t_1)x(t_1)$, 由(3.8)式可以得到

$$x'(t_1)[\Phi'(t_2, t_1)[P^*(t_2) - W(t_2)]\Phi(t_2, t_1)]x(t_1)$$
$$\geqslant x'(t_1)[P^*(t_1) - W(t_1)]x(t_1)$$

因为对于所有的$x(t_1)$此式均成立,不难得出$\Phi'(t, t_f)[P^*(t) - W(t)]\Phi(t, t_f)$ 在 $(t_0, t_f]$ 上是单调不减的. 该矩阵有有界变差;显然, $P^*(\cdot)$ 也具有这个性质.

为了完成定理 II. 3.1 的证明, 需要证明在 $(t_0, t_f]$ 内 $dM(P^*) \geqslant 0$ 以及 $P^*(t_f) \leqslant S$. 而$P^*(t_f) \leqslant S$是显然的. 在下一个引理中将要证明一个近似于 $dM(P^*) \geqslant 0$ 的结果;这个结果是在 $dM(P^*) \geqslant 0$ 的定义中的向量$v(\cdot)$必须与$u(\cdot)$有关的限制条件下得到的.

引理 II.3.3 令 $P(t)$ 是任意的 $n \times n$ 阶对称矩阵, 且在 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ 上有有界变差,令 $u(\cdot)$ 是在$[t_1, t_2]$上任意的分段连续的控制, $x(t_1)$ 是(3.1)在 t_1 时刻的状态. 那么

$$\int_{t_1}^{t_2} [x'(t) \;\; u'(t)] \begin{bmatrix} dP + (PF + F'P)dt & PGdt \\ G'Pdt & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$= x'(t)P(t)x(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \tag{3.10}$$

再由定理 II.3.1 的假设条件和定义(3.7)式，便有

$$\int_{t_1}^{t_2} [x'(t)\ \ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{3.11}$$

证明 用标准的"分部积分"方法和 $P(t)$ 的对称性质可以证明(3.10)式. 关于分部积分所要求的 $x(\cdot)$ 的连续性，可以从 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$ 和 $u(\cdot)$ 的分段连续性得到. 方程(3.11)是(3.8)式和(3.10)式的直接推论.

文献[4]中的主要结果除了用对于所有的 $x(t_1)$（这里的 $x(\cdot)$ 由(3.1)式所定义)和 $u(\cdot)$，(3.11) 式都成立的条件代替条件 $dM(P^*) \geqslant 0$ 以外,就和定理中所述的一样. 用以证明定理 II. 3.1 的一连串引理中的最后一个表明这种限制是不必要的.

引理 II.3.4 根据上面所定义的符号，令 $P^*(\cdot)$ 是使 (3.11) 式对于所有的 $x(t_1)$ 和 $u(\cdot)$ 都成立的矩阵. 那么，$dM(P^*) \geqslant 0$.

证明 假设 $dM(P^*) \geqslant 0$ 不成立. 那么，对于某个 $\varepsilon_1 > 0$，$[t_\alpha, t_\beta] \subset (t_0, t_f]$，以及具有适当的连续性的 $u(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$，有

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta} [v'(t)\ \ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix} v(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < -\varepsilon_1$$

我们导出矛盾的方法在于证明对于区间 $[t_\alpha, t_\beta]$ 存在一种划分 $[t_\alpha, \tau_2]$，$[\tau_2, \tau_3]$，$\cdots$，$[\tau_{N-1}, \tau_\beta]$，使得

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta} [v'(t)\ \ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix} v(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

能够用下式

$$\sum_{i=1}^{N-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[x_i'(t)\ \ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix}x_i(t)\\u(t)\end{bmatrix}$$

来逼近，这里 $x_i(\cdot)$ 都是 $\dot{x}=Fx+Gu$ 的状态轨线．由于这个逼近值是非负的，因而产生矛盾．

详细的论证如下．

因为 $u(\cdot)$ 是分段连续的，$\|\Phi(t,\tau)G(\tau)u(\tau)\|$ 在 $[t_\alpha, t_\beta]\times[t_\alpha,t_\beta]$ 上是有界的，从而对于任意给定的 $\varepsilon_2>0$，存在一个 δ_1，使得

$$\left\|\int_{t-\delta_1}^{t}\Phi(t,\tau)G(\tau)u(\tau)d\tau\right\|<\frac{1}{2}\varepsilon_2$$

在所有的 $[t-\delta_1,t]\subset[t_\alpha,t_\beta]$ 上都成立．同样地，因为 $v(\cdot)$ 在 $[t_\alpha,t_\beta]$ 上是连续的，存在一个 δ_2，使得

$$\sup_{\tau\in[t-\delta_2,t]}\|v(t)-\Phi(t,\tau)v(\tau)\|<\frac{1}{2}\varepsilon_2$$

对所有的 $[t-\delta_2,t]\subset[t_\alpha,t_\beta]$ 都成立．令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$．选择有限的点集 $A_\delta=[\tau_1=t_\alpha,\tau_2,\cdots,\tau_N=t_\beta]$（其中 $\tau_i<\tau_{i+1}$），使得 $\tau_{i+1}-\tau_i<\delta$ 而且 P^* 在 τ_i 点没有跳跃．（最后的条件是可以满足的，因为有有界变差的函数 $P^*(\cdot)$ 是几乎处处可微的．）现在定义

$$x_i(\tau_i)=v(\tau_i)$$

$$x_i(t)=\Phi(t,\tau_i)x_i(\tau_i)+\int_{\tau_i}^{t}\Phi(t,\tau)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

其中 $\tau_i<t<\tau_{i+1}$．注意，在 $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ 上 $x_i(\cdot)$ 是对应于 $u(\cdot)$ 的某个状态轨线，而且根据 δ 的定义，$\|x_i(\cdot)-v(\cdot)\|<\varepsilon_2$．

现在我们有

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[v'(t)\ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix}v(t)\\u(t)\end{bmatrix}$$

$$=\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[x_i'(t)\ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix}x_i(t)\\u(t)\end{bmatrix}$$

$$+2\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[v'(t)-x_i'(t)\ \ 0]dM(P^*)\begin{bmatrix}x_i(t)\\u(t)\end{bmatrix}$$

$$+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[v'(t)-x_i'(t)\ \ 0]dM(P^*)$$

$$\times\begin{bmatrix}v(t)-x_i(t)\\0\end{bmatrix}$$

这里第二项和第三项的值可以用一个与 P^* 在 $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ 上的全变差及 ε_2 有关的量来作为上界；而且随着 ε_2 趋于零这个上界值也趋于零. 把区间 $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ 都累积起来，就可以推出

$$\left|\int_{t_\alpha}^{t_\beta}[v'(t)\ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix}v(t)\\u(t)\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{N-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[x_i'(t)\ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix}x_i(t)\\u(t)\end{bmatrix}\right|$$

$$\leqslant K\varepsilon_2$$

这里 K 是反映 P^* 在 $[t_\alpha, t_\beta]$ 上的全变差的系数. 选取 ε_2，使 $K\varepsilon_2<\varepsilon_1$，那么，由于

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta}[v'(t)\ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix}v(t)\\u(t)\end{bmatrix}<-\varepsilon_1$$

以及

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[x_i'(t)\ u'(t)]dM(P^*)\begin{bmatrix}x_i(t)\\u(t)\end{bmatrix}\geqslant 0$$

在所有的 $[\tau_i, \tau_{i+1}]\subset(t_0, t_f]$ 上都成立，就得到了矛盾.

到此就完成了定理 II.3.1 的证明.

评注 3.1 1. 条件 $V[0, t_0, u(\cdot)]\geqslant 0$ 等价于 $V^*[0,$

$t_0]=0$.（如果对于某个特殊的 $u(\cdot)$，有 $V[0, t_0, u(\cdot)]<0$，那么，由于放大了 $u(t)$，也就放大了 V，可见 V 可以取到任意的负值，也就是 $V^*[0, t_0]=-\infty$. 因此，$V^*[0,t_0]>-\infty$ 就表明对所有的 $u(\cdot)$ 有 $V[0, t_0, u(\cdot)]\geqslant 0$，进而，注意到 $V[0,t_0,u(t)=0]=0$；对所有的 $u(\cdot)$，$V[0, t_0, u(\cdot)]\geqslant 0$，就可推出 $V^*[0, t_0]=0$.）

2. 为了今后查阅方便起见，我们将上述结论用不很严密，但却比较直观的语言概括如下：

$$\text{非负性}+\text{可控性}\Rightarrow \text{在}(t_0, t_f]\text{内} V^* \text{是有限的} \tag{3.12}$$

$$\text{非负性}+\text{可控性}\Rightarrow \exists P,\ \text{使得}\ P(t_f)\leqslant S\ \text{以及在}(t_0, t_f]\text{内}\ dM(P)\geqslant 0 \tag{3.13}$$

3. 定理第二部分的证明方法是去找一个特殊的，满足所要的那些约束的 $P(\cdot)$，也就是 $P=P^*$，而 $V^*[x_1, t_1]=x_1'P^*(t_1)x_1$. 然而，读者应当明白，通常还存在另外一些满足约束条件的，不同于 P^* 的矩阵 P. 关于这一点在本章后面再作解释.

4. 也可能出现这样一种情况：虽然非负性和可控性条件成立，但对于所有非零的 x_0，$V^*[x_0, t_0]=-\infty$. 这就意味着要想改进(3.12)式，使得对于所有的 x_1 和所有的 $t_1\in[t_0, t_f]$，$V^*[x_1, t_1]$ 是有限的任何企图都是无效的. 文献[4]中曾给出这样一个例题. 其动力学特性为 $\dot{x}=u$，$t_0=0$，$t_f=\pi/2$，而 $V[x_0,0,u(\cdot)]=\int_0^{\pi/2}(-x^2+u^2)dt$.

首先，建立一个分段连续的控制序列，使得对于任何不等于零的 x_0，有 $V[x_0, 0, u_n(\cdot)]\to-\infty$. 令 ε_n 是一个满足 $\varepsilon_n\leqslant 1$ 的单调递减的序列，且当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$. 在 [0,

ε_n)上，令 $u_n(t)=0$，而在 $[\varepsilon_n,1]$ 上，令 $u_n(t)=x_0(\cos\varepsilon_n)(\cos t)$。容易验证，当 $n\to\infty$ 时，$V[x_0,0,u_n(\cdot)]=-(\varepsilon_n+\cot\varepsilon_n)x_0^2$ 将发散到 $-\infty$。

下面再来证明 $V[0,0,u(\cdot)]$ 的非负性。在 $u(\cdot)$ 是分段连续的情况下，$x(\cdot)$ 在 $[0,\pi/2]$ 上是连续的。在 $[0,\pi]$ 上定义 $\bar{x}(\cdot)$ 是 $x(\cdot)$ 关于 $t=\pi/2$ 的反射，也就是在 $0\leqslant t\leqslant\pi/2$ 上，$\bar{x}(t)=x(t)$，而在 $\pi/2\leqslant t\leqslant\pi$ 上，$\bar{x}(t)=x(\pi-t)$。因此，在 $[0,\pi]$ 上，$\bar{x}(\cdot)$ 的傅氏级数展开式就是

$$\bar{x}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kt.$$

可以算得

$$V[0,0,u(\cdot)]=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2(k^2-1),$$

显然，它是非负的。顺便指出，所有形式为 $\alpha\sin t$ 的控制都会导致 $V[0,0,u(\cdot)]=0$。

5. 在 $dM(P^*)\geqslant 0$ 的定义中，取 $v(t)=0$，也可以证明 V^* 有限的必要条件是 $R(t)\geqslant 0$。正如前面所提到的，人们早就知道 R 的非负性是存在有限的最优性能指标的必要条件。

6. 矩阵 P^* 不一定是连续的。例如，考虑动力学系统 $\dot{x}=u$，而

$$V[x_0,0,u(\cdot)]=-\int_0^1 K(t)x(t)u(t)dt+\frac{1}{2}x^2(1),$$

其中在 $[0,1/2)$ 上，$K(t)=0$；在 $[1/2,1]$ 上，$K(t)=1$。不难证明：当 $t\leqslant 1/2$ 时，

$$V[x(t),t,u(\cdot)]=\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{2}\right),$$

而当 $t\geqslant 1/2$ 时，

$$V[x(t), t, u(\cdot)] = \frac{1}{2} x^2(t).$$

这就是说当 $t < 1/2$ 时，$V^*[x(t), t] = 0$，而当 $t \geqslant 1/2$ 时，

$$V^*[x(t), t] = \frac{1}{2} x^2(t).$$

然而，我们能够确定$P^*(\cdot)$，甚至任何满足 Riemann-Stieltjes 不等式的 $P(\cdot)$ 只可能在一个方向上出现跳跃.

引理 II.3.5 令 $P(t)$ 是一个对称的，在 $(t_0, t_f]$ 上有有界变差的矩阵，且满足条件 $P(t_f) \leqslant S$ 和在 $(t_0, t_f]$ 内 $dM(P) \geqslant 0$. 那么，$P(t)$ 的所有跳跃都是非负的，也就是

$$\lim_{\tau \uparrow t} P(\tau) \leqslant P(t) \quad 对于\ t \in (t_0, t_f]$$

$$\lim_{\tau \downarrow t} P(\tau) \geqslant P(t) \quad 对于\ t \in (t_0, t_f]$$

证明 令 $t \in (t_0, t_f]$是 $P(\cdot)$ 的一个间断点，$v(\cdot)$ 是任意的常向量，而 $u(\cdot)$ 在 $[t-\delta, t] \subset (t_0, t_f]$ 内为零. 根据在 $(t_0, t_f]$ 上 $dM(P) \geqslant 0$的条件，所以，在 $[t-\delta, t]$ 上 $dM(P) \geqslant 0$，再令 $\delta \to 0$，就有

$$v'(t)[P(t) - \lim_{\tau \uparrow t} P(\tau)]v(t) \geqslant 0$$

因为 $v(t)$ 是任意的，就得到第一个结论. 同样，可以证明第二个结论也成立.

以后不再专门说明，而允许区间在 t_0 点是闭的，或者在 t_f 点是开的，这时引理显然仍成立.

作为文献 [7] 中所研究的完全奇异情形的推广，在文献 [3] 中给出了类似于定理 3.1 的结果的证明. 在文献 [7] 中用的是使奇异问题正则化的方法，也就是用一个大于零的量 $\varepsilon \int_{t_0}^{T} u'u dt$ 迭加到奇异问题的性能指标上而得到的非奇异问题来代替原来的奇异问题，然后再让 ε 趋于零. 当然，这个非奇异问题是容易求解的，但必须证明，当 $\varepsilon \to 0$ 时有关极限的

一些性质(文献[5]中也采用了类似的办法).在文献[11]和[12]中可以找到更清楚的推导,它不必在得到部分奇异情形的条件之前先求得完全奇异情形的条件(除了要进行一些无关紧要的修改,例如时间反向等);这个证明的重要特点就在于它使用了有关有界变差的函数序列的 Helly 收敛性定理.

现在开始研究本章中第二个重要结果,它可看成为定理3.1的部分逆命题,叙述如下:

定理 II.3.2 设在 $[t_0, t_f]$ 上,存在一个对称的,有有界变差的矩阵 $P(\cdot)$,且 $P(t_f) \leqslant S$ 以及在 $[t_0, t_f]$ 内有 $dM(P) \geqslant 0$. 那么,对每一个 $u(\cdot)$,都有 $V[0, t_0, u(\cdot)] \geqslant 0$ 成立.

证明 利用引理 3.4 的结论,对于每个 $[t_1, t_2] \subseteq [t_0, t_f]$,可以写出

$$\int_{t_1}^{t_2} [x'(t) \ \ u'(t)] dM(P) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$= x'(t)P(t)x(t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} q(x, u) dt$$

根据假设 $dM(P) \geqslant 0$,对于区间 $[t_0, t_f]$,式子

$$x'(t)P(t_0)x(t_0) \leqslant x'(t_f)P(t_f)x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} q(x, u) dt$$

对于每个 $x(t_0)$ 和每个 $u(\cdot)$ 都成立. 特别地,当 $x(t_0) = 0$ 时,注意到 $P(t_f) \leqslant S$,对于每个 $u(\cdot)$,就有 $V[0, t_0, u(\cdot)] \geqslant 0$.

评注 3.2 1. 用不很严密的语言将上述结果概述如下:

$$P(t_f) \leqslant S$$

$$\text{以及在 } [t_0, t_f] \text{ 内 } dM(P) \geqslant 0 \Rightarrow \text{非负性条件.} \qquad (3.14)$$

2. 从(3.12)式到(3.14)式的论断清楚地指出了为什么定理 3.1 和定理 3.2 不是完全互逆的. 这里基本上有两个方面的问题:一个是定理 3.1 要求可控性条件,而定理 3.2 中却没

有，另一个是为了保证非负性，需要的是左闭区间的条件，而由非负性所推出的却是左开区间的条件.

3. 事实上，由定理 3.2 的假设条件还可以得到稍微强一些的结果，即对所有的 x_0, $V^*[x_0, t_0]$ 是有限的. 这一点不难从证明定理时所得到的不等式推出.

为了得到更好的结果（这是指要更多地得到既充分又必要的条件，而不是只是充分或只是必要的条件），我们建议改变一下观点，而以第一节中所提出的鲁棒性和非鲁棒性问题为基础来进行讨论. 因此，我们感兴趣的不仅是 $V^*[0, t_0]$ 有限的条件，而且还有对于在 t_0 的某个邻域内的时刻 t', $V^*[0, t']$ 有限的条件(即对于初始时间的鲁棒性)，以及对于在零点的某个邻域内的 x_0, $V^*[x_0, t_0]$ 是有限的条件. (由于问题的线性二次性质，所以对于所有的 x_0, $V^*[x_0, t_0]$ 都是有限的.)

下面要讲的定理 3.3 就是沿着这个方向进行的，它把对于所有的 x_0, $V^*[x_0, t_0]$ 的有限性和满足一定条件的矩阵 P 的存在性联系了起来.

定理 II.3.3 对于所有的 x_0, $V^*[x_0, t_0] > -\infty$，当且仅当在 $[t_0, t_f]$ 上存在一个有有界变差的对称矩阵 $P(\cdot)$，使得 $P(t_f) \leqslant S$，且在 $[t_0, t_f]$ 内 $dM(P) \geqslant 0$.

证明 因为对于所有的 $u(\cdot)$，当且仅当 $V^*[0, t_0] = 0$ 时，$V[0, t_0, u(\cdot)] \geqslant 0$. 所以根据定理 3.1，对于所有的 x_1 和 $t_1 \in (t_0, t_f]$，有 $V^*[x_1, t_1] > -\infty$. 又因为对于所有的 x_0, $V^*[x_0, t_0] > -\infty$，所以，对于某个对称矩阵 $P^*(t_1)$，以及所有的 x_1, $t_1 \in [t_0, t_f]$，有 $V^*[x_1, t_1] = x_1' P^*(t_1) x_1$. 只要对证明定理 3.1 时所用到的那些引理作适当的修改，就可以得到这个定理的必要性. 如同评注 3.2.3 所阐明的，其充分性是定理 3.2 的证明的简单推论.

文献 [6] 中第一次提出了 $V^*[x_0, t_0]$ 存在的充分必要条

件. 除了条件 $dM(P)\geqslant 0$ 用约束条件(3.11)式代替以外，其他和定理 3.3 中的一样.

评注 3.3 1. 这个结果的一个直接推论是: 若对于所有的 x_0, $V^*[x_0, t_0] > -\infty$, 则对于所有的 x_1 和 $t_1\in[t_0, t_f]$, 有 $V^*[x_1, t_1] > -\infty$. (这里只用到这样一个事实: 若在属于$[t_0,t_f]$之内的所有闭区间上，有 $dM(P)\geqslant 0$, 那么,在属于 $[t_1,t_f]$ 之内的所有闭区间上，也有 $dM(P)\geqslant 0$.)

2. 我们把由评注 1 推广的这个结果叙述为

$$\begin{aligned}&\text{在 } [t_0, t_f] \text{ 上 } V^* \text{ 是有限的}\\ &\Longleftrightarrow P(t_f)\leqslant S, \text{以及在 } [t_0, t_f] \text{ 内 } dM(P)\geqslant 0\\ &\Longleftrightarrow \text{在 } [t_0, t_f] \text{ 内 } V^* \text{ 是有限的}\end{aligned}\tag{3.15}$$

3. 比较定理 3.1 和定理 3.3, 可以看出 $dM(P)\geqslant 0$ 满足的区间在 t_0 点是开还是闭,将依我们所考虑的 $x(t_0)$ 是受约束的,还是自由的而定. 其次,可以看出,该区间在 t_f 点是开,还是闭,将依 $x(t_f)$ 是受约束还是不受约束而定.

4. 联系到定理 3.3, 评注 3.1 中的例题表明可能存在有有界变差的对称矩阵 P,且满足 $P(t_f)\leqslant S$, 以及在 $(t_0, t_f]$ 内有 $dM(P)\geqslant 0$, 但在 $[t_0, t_f]$ 内,却没有 $dM(P)\geqslant 0$.

现在,我们给出定理 3.3 的两个推论，它们表明这个定理的充分必要条件实际上正是大家比较熟悉的 (但不那么一般性的) 控制问题解的存在性条件的推广. 对于实际上显然成立的第一个推论,我们假定矩阵 P 在某个区间$[t_1, t_2]\subseteq[t_0,t_f]$上是可微的,由此得到一个线性的矩阵微分不等式. 对于第二个推论,我们假设在区间 $[t_0, t_f]$ 上问题是非奇异的; 于是,就可以证明定理 3.3 的充分必要条件等价于 $P^*(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上满足 Riccati 微分方程的著名条件. 对于这些推论以及另外一些有关的结果有兴趣的读者可以参考文献 [4], [5] 和 [10].

推论 II.3.1 令$P(t)$是在 $[t_0, t_f]$上有有界变差的对称矩阵，且在$[t_0,t_f]$内$dM(P) \geqslant 0$. 另外还假设$P(t)$在t的邻域内是可微的. 那么，在t的邻域内，就有

$$\begin{bmatrix} \dot{P} + PF + F'P + Q & PG + H \\ (PG + H)' & R \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

反之，在t的邻域内满足这个不等式就意味着在这个邻域内$dM(P) \geqslant 0$.

推论 II.3.2 假设在$[t_0, t_f]$上$R(t) > 0$. 若对于每个x_0, $V^*[x_0, t_0]$是有限的，那么，在$[t_0, t_f]$上由$V^*[x(t), t] = x'(t) P^*(t)x(t)$所决定的矩阵$P^*(t)$是连续可微的，而且在$[t_0, t_f]$上满足

$$\dot{P}^* + P^*F + F'P^* + Q - (P^*G + H)R^{-1}(P^*G + H)' = 0$$

$$P^*(t_f) = S$$

反之，若这一 Riccati 方程的解在$[t_0, t_f]$上没有逃逸时间，那么，对于每个x_0, $V^*[x_0,t_0]$是有限的，且由$x_0'P^*(t_0)x_0$所给定.

推论 II. 3.1 的另一种形式可以在时变网络综合和协方差因式分解等问题中得到广泛的应用，参考文献[11,12].

这样就完成了我们"关于初始状态的鲁棒性"概念的讨论. 现在，为了把初始状态的鲁棒性和初始时间的鲁棒性联系起来，我们来研究"关于初始时间的鲁棒性". 在评注 3.3.1 中，考虑过把初始时间从t_0改为某个$t \in (t_0, t_f]$. 现在需要考虑取初始时间$t_{-1} < t_0$的可能性. 下面的定理将给出这个重要的结果.

定理 II.3.4 假设对于所有的x_0, $V^*[x_0, t_0] > -\infty$. 那么，存在$t_{-1} < t_0$，且在$[t_{-1}, t_0)$上可以定义$F(\cdot)$, $G(\cdot)$, $H(\cdot)$, $Q(\cdot)$和$R(\cdot)$，使得在$[t_{-1},t_f]$上它们都是连续的，并有

$$\int_{t_{-1}}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)G(\tau)G'(\tau)\Phi(t_1,\tau)d\tau > 0, \forall t_1 \in (t_{-1}, t_f] \tag{3.16}$$

并且对于所有的 $u(\cdot)$, $V[0, t_{-1}, u(\cdot)] \geq 0$,因而,对于所有的 $x(t-1) = x_{-1}$, $V^*[x_{-1}, t_{-1}] > -\infty$.

证明 首先,我们对于一种特殊情况来证明这个定理,然后,再证明一般情况总是可以化为这种特殊情况的.

令 $P(\cdot)$ 是一个由定理 3.3 所保证的在 $[t_0, t_f]$ 上存在的矩阵. 现在, 假设在 t_0 的邻域 $[t_0, t_0+\varepsilon]$ 内, $\dot{P}$ 也是存在的. 取任意的 $t_{-1} < t_0$, 并取 $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ 是任意一对在 $\left[t_{-1}, \frac{1}{2}(t_{-1}+t_0)\right]$上完全可控的常数矩阵;然后,在$\left[\frac{1}{2}(t_{-1}+t_0), t_0\right)$ 上定义 $F(\cdot)$, $G(\cdot)$, 并保证在连接处的光滑性和在 $[t_{-1}, t_f]$ 上的连续性.

令在$[t_{-1}, t_0)$上 $\dot{P}(t) = \dot{P}(t_0)$;这就保证了$P(t)$在$[t_{-1}, t_0]$上是连续的. 在$[t_{-1}, t_0)$上选取 $Q(\cdot)$,使得 $\dot{P} + PF + F'P + Q$ 在$[t_{-1}, t_0]$ 上是常数;这保证了 $Q(\cdot)$ 在 $[t_{-1}, t_f]$ 上是连续的. 在$[t_{-1}, t_0)$上选取 $H(\cdot)$, 使 $PG + H$ 在$[t_{-1}, t_0]$上是常数; 同样地, 这保证了 $H(\cdot)$ 在 $[t_{-1}, t_f]$ 上是连续的. 最后, 在 $[t_{-1}, t_0)$上选取 $R(\cdot)$ 是常数, 并且等于 $R(t_0)$, 这样就保证了它在 $[t_{-1}, t_f]$ 上的连续性.

这样的选取办法保证了

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} \dot{P} + PF + F'P + Q & PG + H \\ (PG + H)' & R \end{bmatrix}$$

在$[t_{-1}, t_0]$上是常数. 由于对所有的 $t_1 \in [t_0, t_f]$,在 $[t_0, t_1]$ 上 $dM(P) \geq 0$, 和在 t_0 的邻域内存在 $\dot{P}$, 就保证了 $\dot{M}(t_0) \geq 0$ (参考推论 3.1). 因此, 在 $[t_{-1}, t_0]$ 上 $\dot{M} \geq 0$, 而在 $[t_{-1}, t_f]$ 内 $dM(P) \geq 0$. 根据定理 3.3, 对于所有的 x_{-1}, $V^*[x_{-1}, t_{-1}] > -\infty$. 由于在 $\left[t_{-1}, \frac{1}{2}(t_{-1}+t_0)\right]$上选取$F(\cdot)$,$G(\cdot)$的方法, (3.16)式成立.

现在，假设在 t_0 的邻域 $[t_0, t_0+t]$ 内，$\dot{P}$ 不存在. 对于 $t \leqslant t_0$，考虑以下方程

$$\dot{P} + PF + F'P + Q - (PG+H)[R_0 + (t_0 - t)^{1/2} I]^{-1} (PG+H)' = 0 \tag{3.17}$$

其中 $R_0 = R(t_0)$，而 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$，$H(\cdot)$ 和 $Q(\cdot)$ 是它们对于 $t < t_0$ 的任意的连续开拓，只要保证在 t_0 点是连续的. 方程(3.17)的初始条件是已知量 $\Pi_0 = P(t_0)$.

如果 R_0 是非奇异的，可以保证 $P(t)$ 在某个区间 $[t_{-2}, t_0]$ 内是存在的，而在 $[t_{-2}, t_0)$ 内 $\dot{P}$ 也是存在的. 然而，在 R_0 是奇异的情况下，$\dot{P}$ 将随着 $t \uparrow t_0$ 而趋于无界，因此，就提出了下面要解决的存在性问题. 令 $\tau = (t_0 - t)^{1/2}$. 于是

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{2(t_0 - t)^{1/2}}\frac{dP}{d\tau}$$

这里 τ 是一个新的独立变量，(3.17)式就成为

$$-\frac{dP}{d\tau} + 2\tau[PF + F'P + Q] - (PG+H)2\tau(R_0 + \tau I)^{-1}(PG+H)' = 0 \tag{3.18}$$

这个方程定义在 $\tau \geqslant 0$ 的区间内，严格地说，由于引进了新的独立变量，对于 $F(\cdot)$等应该用不同的符号来表示它们. 对于这个方程有 $P(\tau)|_{\tau=0} = \Pi_0$. 显然，当 $\tau > 0$ 时，$\tau(R_0 + \tau I)^{-1}$ 是连续的，不难验证，在 $\tau = 0$ 处它也是连续的. 所以，$P(\tau)$在某个区间 $[0, \tau_2]$ 内存在，且有连续的 $\dfrac{dP(\tau)}{d\tau}$. 这样可以推出，(3.17)式在某个区间$[t_{-2}, t_0]$内有解，且在$[t_{-2}, t_0)$上 $\dfrac{dP(\tau)}{d\tau}$ 存在，实际上在 t_{-2} 的一个邻域内 $\dfrac{dP(t)}{dt}$ 存在.

(3.17)式表明在 $[t_{-2}, t_0)$ 上

$$\begin{bmatrix} \dot{P} + PF + F'P + Q & PG + H \\ (PG + H)' & R \end{bmatrix} \geqslant 0$$

这里 $R = R_G + (t_0 - t)^{1/2} I$ 是非奇异的. 由于

$$\lim_{t \uparrow t_0} P(t) = \Pi_0 = P(t_0),$$

所以在 $[t_{-2}, t_f]$ 内 $dM(P) \geqslant 0$.又因为在 t_{-2} 的邻域内 $\dot{P}(t)$ 是存在的,所以可以把证明的第一部分进一步扩展到区间 $[t_{-1}, t_{-2}]$ 上去. 用这样的方法,就可满足可控性假定, 定理也就证完了.

评注 3.4 1.该定理在本书中第一次引进了可延拓性判据. 就我们所知, 在文献 [1] 中首先使用了这个可延拓性概念,在那里只讨论了非奇异问题.

2.如果在整个区间$[t_0, t_f]$上, $R(t)$ 都是非奇异的,那么,上述定理是很容易证明的, 因为 $V^*[x_1, t_1] = x_1'P^*(t_1)x_1$, $P^*(t_1)$是 Riccati 方程的解,而 $t_1 \in [t_0, t_f]$. 于是,对于所有的 $t_1 \in [t_0, t_f]$, $\dot{P}(t_1)$ 总是存在的.

3.我们把上述结论概述如下:

在 $[t_0, t_f]$ 上,V^*是有限的 $\Longrightarrow$
对扩展了的区间 $[t_{-1}, t_f]$,
具有非负性和可控性 (3.19)

以及

在 $[t_0, t_f]$ 上, V^* 是有限的 $\Longrightarrow$
在扩展了的区间 $[t_{-1}, t_f]$ 上
V^* 是有限的. (3.20)

4.检查一下定理 3.4 的证明, 将会看到, t_{-1} 可以取得离 t_0 任意地近. 因此,实质上, 这就使得(3.19)式和 (3.12) 式成为互逆的命题, 而 (3.13) 式的逆可以用包含 P 的一种等价的提法来代替(3.19)式中关于 V^* 在 $[t_0, t_f]$ 上是有限的办法所

得到，这里的 P 是(3.15)式中所用过的.

5. 上述定理的结果可能导致以下错误的推测：假设对于所有的 x_0，$V^*[x_0, t_0] > -\infty$，并且在 $[t_{-1}, t_0]$ 上定义 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$，$H(\cdot)$，$Q(\cdot)$ 和 $R(\cdot)$，使得它们在 $[t_{-1}, t_f]$ 上是连续的；那么，存在 $t_{-2} \in [t_{-1}, t_0)$，使 $V^*[x_{-2}, t_{-2}] > -\infty$.（实际上，可以断言，使 $V^*[x_0, t_0] > -\infty$ 的 t_0 的集合是开的.）作为一个反例，考虑 $\dot{x} = u$，

$$V[x(\tau), \tau, u(\cdot)] = \int_{\tau}^{t_f} [xu + \rho(t)u^2]dt,$$

其中当 $t \in [t_0, t_f]$ 时 $\rho(t) = 0$；而当 $t \in [t_{-1}, t_0)$ 时，$\rho(t) < 0$，并且 $\rho(\cdot)$ 在 $[t_{-1}, t_f]$ 上是连续的. 毫无疑问，由于 ρ 在 $[t_{-2}, t_0)$ 上是负的，所以对于 $t_2 \in [t_{-1}, t_0)$，要使 $V^*[x_{-2}, t_{-2}] > -\infty$ 是不可能的. 然而，对于所有的 $u(\cdot)$，

$$V[x(t_0), t_0, u(\cdot)] = \frac{1}{2}x^2(t_f) - \frac{1}{2}x^2(t_0),$$

因此，

$$V^*[x_0, t_0] = -\frac{1}{2}x_0^2.$$

第二个反例中不用负的 $\rho(t)$，而是设 $\dot{x} = g(t)u$，

$$V[x(\tau), \tau, u(\cdot)] = \int_{\tau}^{t_f} xu\,dt,$$

其中当 $t < 0$ 时，$g(t) = 0$；而当 $t \geqslant 0$ 时，$g(t) = 1$. 如果 $R(t) \geqslant 0$，F，G，H，Q 和 R 都是连续的，是否还能构造这样的反例是不清楚的.

在 $[t_0, t_f]$ 上 $R(t) > 0$，且 $R(\cdot)$ 连续的条件下，上述推测肯定是正确的，因为 $V^*[x(\tau), \tau]$ 可以通过 Riccati 方程的解来决定，如果它的解在 t_0 点存在，那么一定在 t_0 的邻域（包括 t_0 左边的点）内存在.

在这一节中，至此已经分别地考虑了关于初始状态的鲁

棒性(定理 3.3)和关于初始时间的鲁棒性(定理 3.4). 现在，把这些定理和定理 3.1 一起归纳如下.

定理 II.3.5 仍用以前的符号,以下条件是等价的:

(a) 对于所有的x_0, $V^*[x_0, t_0]$ 是有限的.

(b) 对于所有的$x(t)$和$t\in [t_0,t_f]$, $V^*[x(t),t]$是有限的.

(c) $F(\cdot)$ 等的定义区间是可延拓的，以致对于某个 $t_{-1} < t_0$, $V[0,t_{-1},u(\cdot)] \geqslant 0$,而且对于所有的 $t\in (t_{-1},t_f]$,在 $[t_{-1}, t]$ 上是可控的.

(d) 在 $[t_0, t_f]$ 上存在一个有有界变差的对称矩阵 $P(\cdot)$, 且使 $P(t_f) \leqslant S$, 以及在 $[t_0, t_f]$ 内 $dM(P) \geqslant 0$.

我们应强调指出：包含 Riemann-Stieltjes 积分的条件是既充分又必要的.

我们用关于另一种形式的扰动的次要一些的说明来结束这一节. 至此，我们已经考虑了初始状态自零有个偏离以及初始时间 t_0受到扰动后的影响. 还可以考虑的另一种形式的扰动,这就是对矩阵 F, G, H, Q和R的扰动. 如果 $R(t)$ 在 $[t_0,t_f]$ 上是非奇异的,那么,在 $[t_0, t_f]$ 上某个 Riccati 方程的解的存在性就是对所有的 x_0, $V^*[x_0, t_0] > -\infty$ 的充分必要条件,而且这个存在性条件对于 F, G, H, Q 和 R的微小改变是具有鲁棒性的. 如果这个 Riccati 方程在 $(t_0, t_f]$ 上有解，而 t_0 是逃逸时间，因而当 $x_0 = 0$ 时, $V^*[x_0, t_0] = 0$, 但对于某个 $x_0 \neq 0$, $V^*[x_0, t_0] = -\infty$, 事情就完全不一样了; F 等的改变可能会引起对于所有的 x_0,有 $V^*[x_0, t_0] > -\infty$,或者对于某个 x_1 和 $t_1 > t_0$(这里的 t_1 很接近于 t_0), $V^*[x_1, t_1] = -\infty$. 如果对于某个 $t_1\in [t_0, t_f)$, $R(t)$是奇异的,就可能出现第三种可能性. 扰动可能使 $R(t_1)$ 不存在,因而 $V^*[x_1, t_1]$肯定会到 $-\infty$; 即使在未扰动时,对于所有的 x_0,$V^*[x_0, t_0] > -\infty$,也会出现这种情况.

显然，影响扰动的容许量的两个关键因素是 $R(\cdot)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上是非奇异的，还是在区间的某些地方是奇异的；以及对于所有的 x_0，有 $V^*[x_0, t_0] > -\infty$，还是对于所有的 $u(\cdot)$，$V[0, t, u(\cdot)] \geqslant 0$ 而对于某个 x_0，却没有 $V[x_0, t_0] > -\infty$。对于后面一种情形，不论 $R(\cdot)$ 是否是奇异的，我们还可以得到一个辅助性的结果；它表明总可以找到 $R(\cdot)$ 的一个扰动，以便保证对于所有的 x_0，$V^*[x_0, t_0] > -\infty$。

定理 II.3.6 假设对于所有的 $u(\cdot)$，$V[0, t_0, u(\cdot)] \geqslant 0$，而且可控制性条件(3.5)成立。又设在某个 x_0 点，$V^*[x_0, t_0] > -\infty$ 不成立。令 $t_1 \in (t_0, t_f]$ 是任意的（特别是，t_1 可以任意地接近 t_0），任给 $\varepsilon > 0$，令 $\rho(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续，且 $\rho(t_0) = 1$，在 $[t_0, t_1)$ 上 $\rho(t) > 0$，在 $[t_1, t_f]$ 上 $\rho(t) = 0$。在 $[t_0, t_f]$ 上，用 $\bar{R}(t) = R(t) + \varepsilon\rho(t)I$ 代替 $R(t)$ 后，对于所有的 x_0，有 $\bar{V}^*[x_0, t_0] > -\infty$。

证明 令 $t_2 \in (t_0, t_1)$。当 $x(t_0) = 0$ 时，有

$$0 \leqslant \int_{t_0}^{t_2} \{x'Q(t)x + 2u'H(t)x + u'R(t)u\}dt + \int_{t_2}^{t_f} \{x'Q(t)x + 2u'H(t)x + u'R(t)u\}dt + x'(t_f)Sx(t_f)$$

因而

$$0 \leqslant \int_{t_0}^{t_2} \{x'Q(t)x + 2u'H(t)x + u'R(t)u\}dt + x'(t_2)P^*(t_2)x(t_2)$$

其中 $x'(t_2)P^*(t_2)x(t_2) = V^*[x(t_2), t_2]$。

由文献 [1] 中的主要结果可直接推出，使

$$\int_{t_0}^{t_2} \{x'Q(t)x + 2u'H(t)x + u'R(t)u + \varepsilon\rho(t)u'u\}dt + x'(t_2)P^*(t_2)x(t_2)$$

对于任意的 $x(t_0)=x_0$ 取极小的问题，对所有的 x_0 存在不是 $-\infty$ 的解，这是因为存在 $\eta>0$，使得 $x(t_0)=0$ 时，对所有的 $u(\cdot)$，有

$$\int_{t_0}^{t_2}\{x'Q(t)x+2u'H(t)x+u'R(t)u + (\varepsilon\rho(t)-\eta)u'u\}dt+x'(t_2)P^*(t_2)x(t_2)\geqslant 0$$

因此对于所有的 x_0，

$$\begin{aligned}\bar{V}^*[x_0,t_0]&=\min_{u(\cdot)}\int_{t_0}^{t_2}\{x'Q(t)x+2u'H(t)x+u'R(t)u\\&\qquad+\varepsilon\rho(t)u'u\}dt+\bar{V}^*[x(t_2),t_2]\\&\geqslant\min_{u(\cdot)}\int_{t_0}^{t_2}\{x'Q(t)x+2u'H(t)x+u'R(t)u\\&\qquad+\varepsilon\rho(t)u'u\}dt+V^*[x(t_2),t_2]>-\infty\end{aligned}$$

（第一个等式是根据优化原理得到的，第一个不等式是利用了 $\bar{V}^*$ 关于 ε 的单调性.）

2.4 具有端点约束的问题的鲁棒性

在这一节中，考虑具有性能指标(3.2)的系统(3.1). 和以前一样，$x(t_0)$ 是任意确定的，但现在 $x(t_f)$ 不再是自由的，它受到以下约束条件的限制

$$E_fx(t_f)=0 \tag{4.1}$$

这里 E_f 是满行秩的矩阵，有时限定为单位矩阵. 当然，我们感兴趣的是(3.2)的极小化问题，或者是用变量 t 代替了 t_0 以后，(3.2)式的极小化问题.

现在先回顾一下文献[2—4]中所得到的结果. 这些结果的缺陷在于它们是不对称的——必要条件并不是充分的. 我们将会看到引进了鲁棒性条件就可以消除这种不对称性. 这里要引进一种新形式的鲁棒性，它不是以往所给出的那种鲁

棒性在形式上的简单的改变.

文献[2—4]给出了以下结果. 其证明可以用类似于定理 2.1 到定理 2.3 的证明方法得到.

定理 II.4.1 假设对于所有的 $t\in[t_0, t_f)$

$$E_f\int_t^{t_f}\Phi(t_f,\tau)G(\tau)G'(\tau)\Phi'(t_f,\tau)d\tau E_f'>0 \qquad (4.2)$$

令 Z 是以 E_f 的零空间的一组基作为列向量所构成的矩阵.对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0,t_f)$, $V[x(t),t,u(\cdot)]$ 有有限下确界的必要条件是在 $[t_0, t_f)$ 上存在一个有有界变差的对称矩阵 $P(\cdot)$,使得在 $[t_0, t_f)$ 内 $dM(P)\geqslant 0$, 而且

$$\lim_{t\uparrow t_f} Z'[\Phi'(t,t_f)P(t)\Phi(t,t_f)-S]Z\leqslant 0. \qquad (4.3)$$

其充分条件是在 $[t_0, t_f]$ 上存在一个有有界变差的对称矩阵 $P(\cdot)$, 使得在 $[t_0, t_f]$ 内 $dM(P)\geqslant 0$, 而且

$$Z'[P(t_f)-S]Z\leqslant 0. \qquad (4.4)$$

评注 4.1 1.严格地讲, 文献 [2—4] 所涉及到的是保证 $V[x(t), t, u(\cdot)]$ 对于所有的 $t\in(t_0,t_f)$ 具有有限的下确界,以及对于所有的 $u(\cdot)$, $V[0, t_0, u(\cdot)]\geqslant 0$ 的条件. 就像从定理 3.1 和定理 3.2 推导定理 3.3 一样, 也可以用第二节中的方法来推导定理 4.1.

2.可由下式来确定一个满足必要条件的 $P(\cdot)$

$$x'(t)P(t)x(t)=\inf_{u(\cdot)}V[x(t), t, u(\cdot)]$$

且 $E_fx(t_f)=0$.

3.可控性条件 (4.2) 是第二节中给出的一般性条件的一种特殊情形,它保证了最优性能指标的存在,也就是状态约束是可以达到的.

至少可以通过三种不同的途径来探讨鲁棒性问题. 第一, 就像在第三节中改变初始时间 t_0 一样, 研究 t_f 改变后的

影响．第二，对于适当小的 ε，研究用类似于 $\|E_f x(t_f)\| \leqslant \varepsilon$ 的条件代替(4.1)后的影响．第三，利用在性能判据上迭加罚函数的思想（参考文献 [13]），研究去掉(4.1)，而在性能判据(3.2)上迭加一项 $Nx'(t_f)E_f'E_f x(t_f)$（其中 N 是很大的数）之后的影响．后面一种情形中的鲁棒性对应于对所有充分大的 N 最优性能指标的存在性．

如同上节中所指出的，至少在用 t_0 代替 t_f 后，存在着一些问题，它们是没有前两种鲁棒性的．（严格地讲，在上一节中，第二类鲁棒性是用任意的 $x(t_0)$，而不是用 $\|E_0 x(t_0)\| \leqslant \varepsilon$，来代替 $x(t_0)=0$ 的．）现在，我们先看看不具有第三类鲁棒性的问题是存在的．然后再继续讨论不同类型的鲁棒性之间的等价性．这里有些结果摘自文献[14]．

考虑

$$\dot{x}=(t-1)u, \quad V[x_0, 0, u(\cdot)]=\int_0^1 xu\,dt,$$

且有边界约束条件 $x(1)=0$．首先可以证明，在这样的约束条件下，对于所有的 $x(0)$ 和所有的分段连续的 $u(\cdot)$，$V \geqslant 0$．由于这个约束显然是可达的，所以 $\inf V$ 存在．可以看出

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{T \uparrow 1} \int_0^T xu\,dt \\
&= \lim_{T \uparrow 1} \int_0^T \left\{-\int_t^1 (\tau-1)u(\tau)d\tau\right\} u(t)dt \quad (\text{因为} x(1)=0) \\
&= \lim_{T \uparrow 1} \int_0^T \left\{\int_t^1 (\tau-1)u(\tau)d\tau\right\} (t-1)^{-1} \\
&\quad \times \frac{d}{dt}\left\{\int_t^1 (\tau-1)u(\tau)d\tau\right\} dt \\
&= \lim_{T \uparrow 1} \left\{\left[(t-1)^{-1}\left[\int_t^1 (\tau-1)u(\tau)d\tau\right]^2\right]_0^T\right. \\
&\quad + \int_0^T u(t)\left[\int_t^1 (\tau-1)u(\tau)d\tau\right]dt
\end{aligned}$$

$$+\int_0^T (t-1)^{-2}\left[\int_t^1 (\tau-1)u(\tau)d\tau\right]^2 dt\Big\}$$

右边的第二项等于 $-V$，因此

$$V=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 (\tau-1)u(\tau)d\tau\right]^2$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{T\uparrow 1}(T-1)^{-1}\left[\int_T^1 (\tau-1)u(\tau)d\tau\right]^2$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{T\uparrow 1}\int_0^T (t-1)^{-2}\left[\int_t^1 (\tau-1)u(\tau)d\tau\right]^2 dt$$

利用洛必达法则，第一个极限为零，第二个极限是非负的. 所以，就有所要求的 $V\geqslant 0$.

现在来考虑取消了约束条件 $x(1)=0$ 后的 $V[x_0,0,u(\cdot);N]$ 的极小化问题. 我们将要证明，不存在有限的N，能使 $\inf V>-\infty$. 如果有这样的N，那么根据定理3.3，在$[0,1]$上就必定存在一个有有界变差的$P(\cdot)$，且使 $dM(P)\geqslant 0$, $P(1)=N$. 如果这样的$P(\cdot)$有突跳，那么，就像第三节中所阐明的，它只能是正的突跳. 就像文献[7]中所进行的论证那样，可以得出：对于满足 $R(t)=0$, $\forall t\in[t_0,t_f]$，以及 $G(\cdot)$ 和 $H(\cdot)$ 是连续的任何一个问题，对于任何在 $[t_0,t_f]$ 内使 $dM(P)\geqslant 0$ 的 P，有 $PG+H=0$, $\forall t\in(t_0,t_f)$（这个结论是很容易建立的）. 这就是说，这里

$$P(t)(t-1)+\frac{1}{2}=0,$$

或者

$$P(t)=\frac{1}{2}(1-t)^{-1}.$$

这样，端点约束就不可能满足，因为否则在端点处 $P(\cdot)$ 要有无穷的负突跳. 这样就与对于某个N, $\inf V>-\infty$ 的要求相矛盾.

现在回到本节的主要任务上来，即来阐明三种类型的鲁棒性之间的等价性，也就是关于终端时间的鲁棒性，关于终端状态约束的鲁棒性，以及关于在性能指标中的终端加权矩阵的鲁棒性之间的等价性. 下面的第一个定理就要证明后两种鲁棒性的等价性.

先说明一些符号，回忆以前曾有

$$V^*[x_0,t_0] = \inf_{u(\cdot)} V[x_0, t_0, u(\cdot)]$$

$$V^*[x_0, \eta_f] = \inf_{u(\cdot)} V[x_0, t_0, u(\cdot)]$$

且满足约束 $$E_f x(t_f) = \eta_f$$

现在再定义

$$V[x_0, t_0, u(\cdot); N] = V[x_0, t_0, u(\cdot)] + N\|E_f x(t_f)\|^2$$

$$V^*[x_0, t_0; N] = \inf_{u(\cdot)} V[x_0, t_0, u(\cdot); N]$$

和

$$V_\varepsilon^*[x_0, t_0] = \inf_{u(\cdot)} V[x_0, t_0, u(\cdot)]$$

且满足约束

$$\|E_f x(t_f)\| \leqslant \varepsilon.$$

下面将认为 t_0 和 t_f 是确定的. 在本节的后面部分再考虑 t_f 是可以改变的情形；而改变 t_0 不会给出什么新的东西.

定理 II.4.2 下列诸条件是等价的.

(a) 以 t_0 代替 t 以后的可控性条件(4.2)成立，同时对于某个 N 和所有的 x_0，$V^*[x_0, t_0; N]$ 存在.

(b) 对于所有的 $\bar{N} \geqslant$ 某个 N，$V^*[x_0, t_0; \bar{N}]$ 存在，以及在 $\bar{N} \geqslant N$ 时一致地有上界.

(c) 对于所有的 x_0 和所有的 $\varepsilon > 0$，$V_\varepsilon^*[x_0, t_0]$ 存在.

(d) 对于所有的x_0和所有的 η_f，$V^*[x_0, \eta_f]$ 存在.

而且当上述条件中的任何一个成立时，就有

$$\lim_{N\to\infty} V^*[x_0, t_0; N] = \lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon^*[x_0, t_0]$$

$$= V^*[x_0, \eta_f = 0] \tag{4.5}$$

证明 (a)$\Longrightarrow$(b). 根据可控性条件，存在一个 $u(\cdot)$，使状态自 $x(t_0)=x_0$ 转移到 $x(t_f)$(其中 $E_f x(t_f)=0$). 于是，$V[x_0, t_0, u(\cdot)] \geqslant V^*[x_0, t_0; \bar{N}] \geqslant V^*[x_0, t_0; N]$.

(b)$\Longrightarrow$(c). 首先证明 $V_\varepsilon^*[x_0, t_0] < \infty$. 假设不然. 那么，唯一可能发生的情形是对于某个 ε，$\|E_f x(t_f)\| \leqslant \varepsilon$ 是不可达的. 为了导出矛盾，假设是这种情况，并取M使得对于某个任意的 $\delta>0$，和所有的 $\bar{N}$，有 $V^*[x_0, t_0, \bar{N}] < M-\delta$. 在定理的论断(b)的假设条件下，肯定存在这样的M和δ. 定义$U_{\bar{N}}$为满足$V[x_0, t_0, u(\cdot); \bar{N}] < M$ 的分段连续的 $u(\cdot)$ 的集合. 那么，对于 $u(\cdot)\in U_{\bar{N}}$，就有

$$V[x_0, t_0, u(\cdot)] < M - \bar{N}\|E_f x(t_f)\|^2 < M - \bar{N}\varepsilon^2 \tag{4.6}$$

(我们决不可能使 $\|E_f x(t_f)\| < \varepsilon$ 成立). 令

$$Q_{\bar{N}}^* = \inf_{u(\cdot)\in U_{\bar{N}}} V[x_0, t_0, u(\cdot)].$$

因为对于 $\bar{N}_1 > \bar{N}_2$，必有 $U_{\bar{N}_1} \subset U_{\bar{N}_2}$，可以看出，$Q_{\bar{N}}^*$ 是单调递增的. 另一方面，根据(4.6)式，我们有

$$Q_{\bar{N}}^* < M - \bar{N}\varepsilon^2.$$

显然，由此可以得出

$$\lim_{\bar{N}\to\infty} Q_{\bar{N}}^* = -\infty.$$

所以，对于所有的$\bar{N}$，$Q_{\bar{N}}^* = -\infty$，以及对于任意给定的 $K>0$，必定存在 $\bar{u}(\cdot)\in U_{\bar{N}+1}$，使得$V[x_0, t_0, \bar{u}(\cdot)] < -K$. 于是，就有

$$V^*[x_0, t_0; \bar{N}] \leqslant V[x_0, t_0, \bar{u}(\cdot)] + \bar{N}\|E_f \bar{x}(t_f)\|^2$$

$$< -K + \bar{N}\|E_f \bar{x}(\cdot_f)\|^2$$

和

$$V[x_0,t_0,\bar{u}(\cdot);\bar{N}+1]=V[x_0,t_0,\bar{u}(\cdot);\bar{N}]+\|E_f\bar{x}(t_f)\|^2$$

$$>V^*[x_0,t_0;\bar{N}]+\frac{1}{N}V^*[x_0,t_0;\bar{N}]+K$$

因为K是任意的，这就违反了约束条件 $V[x_0, t_0, \bar{u}(\cdot); \bar{N}+1]<M$,因而产生了矛盾.

要证明 $V_\varepsilon^*[x_0, t_0]>-\infty$ 是很容易的. 对于所有使 $\|E_fx(t_f)\|\leqslant\varepsilon$ 的 $u(\cdot)$, 有

$$V^*[x_0, t_0; N]\leqslant V[x_0, t_0, u(\cdot)]+N\varepsilon^2$$

或者

$$V[x_0, t_0, u(\cdot)]\geqslant V^*[x_0, t_0; N]-N\varepsilon^2$$

这样就得到了 $V_\varepsilon^*[x_0, t_0]$ 的下界.

(c)$\Longrightarrow$(d). 首先应注意到 $V_\varepsilon^*[x_0, t_0]$ 的有限性蕴含着在以 t_0 代替 t 的情况下的可控性条件(4.2)成立. 因为如果不是这样的话，那么一定存在某个初始状态 $\bar{x}_0$ 和某个 ε 的值，使得没有控制 $u(\cdot)$能使 $\|E_fx(t_f)\|<\varepsilon$ 成立. 由于所有的 η_f 是可达的,因此可控性条件成立意味着 $V^*[x_0, \eta_f]<\infty$. 对于确定的 η_f,选取 ε,使$\|\eta_f\|\leqslant\varepsilon$. 这样一来,就可以清楚地看到 $V^*[x_0, \eta_f]\geqslant V_\varepsilon^*[x_0, t_0]>-\infty$.

(d)$\Longrightarrow$(a). 可控性是显然的. 其次,根据定理 2.1，对于某些 P_{00}, $P_{0f}=P_{f0}'$ 和 P_{ff}, 有以下表达式

$$V^*[x_0,\eta_f]=[x_0',\eta_f']\begin{bmatrix}P_{00} & P_{0f}\\ P_{f0} & P_{ff}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ \eta_f\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

所以

$$V^*[x_0,t_0;N]=\inf_{\eta_f}\ [\inf_{u(\cdot)}\{V[x_0, t_0, u(\cdot)]+N\|\eta_f\|^2\}]$$

这里的 $u(\cdot)$ 属于能使 $E_fx(t_f)=\eta_f$ 的那一类控制. 括号里的下确界正好就是 $V^*[x_0, \eta_f]+N\|\eta_f\|^2$, 因此

$$V^*[x_0, t_0; N] = \inf_{\eta_f}\left\{[x_0', \eta_f']\begin{bmatrix} P_{00} & P_{0f} \\ P_{f0} & P_{ff}+NI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ \eta_f \end{bmatrix}\right\}$$

$$= x_0'[P_{00} - P_{0f}(P_{ff}+NI)^{-1}P_{f0}]x_0 \qquad (4.8)$$

对于适当大的 N，显然对所有的 x_0 有 $V^*[x_0, t_0; N] > -\infty$. 显然 $V^*[x_0, t_0; N] < \infty$. 这样就证明了条件 (a) 到条件(d)都是等价的.

还剩下(4.5)式的证明. 显然从 (4.7) 式和 (4.8) 式可以得到

$$\lim_{N\to\infty} V^*[x_0, t_0; N] = V^*[x_0, \eta_f = 0]$$

然而

$$V_\varepsilon^*[x_0, t_0] = \min_{\|\eta_f\|\leqslant\varepsilon}[2x_0'P_{0f}\eta_f + \eta_f'P_{ff}\eta_f] + x_0'P_{00}x_0$$

由于在极小化和求极限的运算过程中， x_0, P_{0f} 和 P_{ff} 是确定的，所以，显然有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\min_{\|\eta_f\|\leqslant\varepsilon}[2x_0'P_{0f}\eta_f + \eta_f'P_{ff}\eta_f] = 0$$

这样一来，就得到了所要求的

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon^*[x_0, t_0] = x_0'P_{00}x_0 = V^*[x_0, \eta_f = 0]$$

评注 4.2 1 作少量的演算即可证明，条件(c)可用(c')代替，

(c') 对于所有的 x_0 和所有的 $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon^*[x_0, t_0]$ 存在.

2 可能更有点意外，条件 (c) 还可以用条件(c'')代替

(c'') 对于所有的 x_0 和某个 $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon^*[x_0, t_0]$存在.

其理由是，用简单地标定自变量的办法，对于所有的K有

$$V_{K\varepsilon}^*[Kx_0, t_0] = K^2V_\varepsilon^*[x_0, t_0].$$

在第三节中，我们证明了关于某种鲁棒性的各种条件等价于包含 Riemann-Stieltjes 积分的单个条件. 而这里我们还

不能这样做，正如下面要论证的，所考虑的那些鲁棒性的种类还是不完全恰当的.

大体上，可以把在 $E_f x(t_f)=0$ 的条件下，(3.2)式的极小化问题看作是 (3.2) 式中的积分项和终端加权因子 $x'(t_f)\times[S+(+\infty)E_f'E_f]x(t_f)$之和的极小化问题. 定理 4.2 的条件 (a) 和 (b) 可以看作是当N适当大的情况下，用 $x'(t_f)[S+NE_f'E_f]x(t_f)$代替该加权因子的一项. 这里，允许加权矩阵作某种扰动，但是，若 E_f 的行数比 $x(\cdot)$ 的维数少的时候，显然加权矩阵的一部分是不可能被扰动的. 因此，有理由假定鲁棒性的形式为：对于某个小的正数 η，用使$\|\bar{S}-S\|<\eta$ 的某个对称矩阵 $\bar{S}$ 去代替 S. 这种方法称为 S 扰动. 引进这种类型的鲁棒性，就把定理 4.1 和定理 4.2 的思想联系了起来.

定理 II.4.3 以下条件是等价的.

(a) 以 t_0 代替 t 之后，可控性条件 (4.2) 成立，并且对于某个 $\eta>0$，以及用满足 $\|\bar{S}-S\|<\eta$ 的任意一个对称矩阵 $\bar{S}$ 代替 S 后，$V^*[x_0,t_0;N]$对某个N和所有的 x_0 都存在.

(b) 对于某个 $\eta>0$，以及具有 $\|\bar{S}-S\|<\eta$ 的任意 $\bar{S}$，在$[t_0,t_f]$上存在有有界变差的对称矩阵 $P(\cdot)$，使得在 $[t_0,t_f]$ 内 $dM(P)\geqslant 0$，而且对于定理 4.1 中的 Z，有

$$Z'[P(t_f)-\bar{S}]Z\leqslant 0. \tag{4.9}$$

(c) 定理 4.2 中 (b)—(d) 的任意一个条件只要作显然的修改均成立.

证明 (a)$\Longleftrightarrow$(c)是显然的. 我们首先证明(a)$\Longrightarrow$(b). 根据定理 3.3，存在一个在 $[t_0,t_f]$ 上有有界变差的对称矩阵 $P(\cdot)$，且在 $[t_0,t_f]$ 内有 $dM(P)\geqslant 0$，以及

$$P(t_f)-\bar{S}-NE_f'E_f\leqslant 0$$

由此便可以直接推出方程 (4.9). 为了证明 (b)$\Longrightarrow$(a)，注意，当 $\bar{\eta}<\eta-\|\bar{S}-S\|$ 时，有 $\|\bar{S}-\bar{\eta}I-S\|<\eta$，利用以

$\bar{S}-\eta I$ 代替 $\bar{S}$ 后的条件 (b)，就存在一个具有所述各种性质的 $P(\cdot)$，只是(4.1)要用

$$Z'[P(t_f)-\bar{S}+\eta I]Z \leqslant 0$$

来代替，(这是由 $Z'[P(t_f)-\bar{S}]Z<0$ 而得来的)．通过矩阵的代数运算将表明：存在这样的 N，使得

$$\begin{bmatrix} Z' \\ E_f \end{bmatrix} [P(t_f)-\bar{S}-NE_f'E_f][ZE_f'] < 0$$

或者

$$P(t_f)-\bar{S}-NE_f'E_f<0$$

于是定理 3.3 就意味着条件 (a) 成立．

评注 4.3 1．在上面的证明中关键的一步是用严格的不等式代替 (4.9)．若不用 S 扰动的思想，这是不可能的．

2．在 E_f 是方阵的情形下，就完全不需要 S 的扰动了．条件 (4.4) 和 (4.9) 也不再存在．

现在，我们来探讨第三类鲁棒性，即涉及到对于终端状态 x_f 的扰动．为了简单起见，我们将考虑形如 $x(t_f)=0$ 的约束．

定理 II.4.4 假设可控性条件(4.2)成立．于是以下诸条件是等价的．

(a) 对于某个 N 和所有的 x_0, $V^*[x_0, t_0; N]$ 存在．

(b) 存在 $t_1>t_f$，使我们可以在 $(t_f, t_1]$ 上定义 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$等，使得它们在 $[t_0, t_1]$ 上都是连续的，而且对于所有的 $t\in[t_0, t_1)$

$$\int_t^{t_1}\Phi(t_1,\tau)G(\tau)G'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)d\tau>0$$

以及对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0, t_1)$，端点受约束的问题有解．

证明 (a)$\Longrightarrow$(b)．根据定理3.3，在 $[t_0, t_f]$ 上存在一个有有界变差的对称矩阵 $P(\cdot)$，且在$[t_0, t_f]$内满足 $dM(P)\geqslant 0$，和 $P(t_f)\leqslant S+NI$．用稍微改变了的定理 3.4 中延伸过程的

证明方法，来定义具有所述性质的 $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ 等，以及使得在 $[t_0, t_1]$ 内有 $dM(P) \geqslant 0$ 的 $P(\cdot)$. 根据定理 4.1, 在 $[t, t_1]$ 上定义的端点受约束的问题有解.

(b)$\Longrightarrow$(a). 假设在 $x(t_1) = 0$ 的约束条件下,

$$x'(t)P(t)x(t) = \inf_{u(\cdot)} \int_t^{t_1} [x'Q(t)x + 2u'H(t)x + u'R(t)u]dt.$$

于是，对于 $t \leqslant t_f$ 和使得 $NI \geqslant P(t_f)$ 的 N, 可以得到 $V^*[x_0, t_0; N]$ 的下界:

$$\begin{aligned} x'(t_0)P(t_0)x(t_0) &= \inf_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [x'Q(t)x + 2u'H(t)x \right. \\ &\quad \left. + u'R(t)u]dt + x'(t_f)P(t_f)x(t_f) \right\} \\ &\leqslant \inf_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [x'Q(t)x + 2u'H(t)x + u'R(t)u]dt \right. \\ &\quad \left. + N\|x(t_f)\|^2 \right\} \\ &= V^*[x_0, t_0; N] \end{aligned}$$

这就证明了所要的结论.

评注 4.4 对于非方的 E_f, 考虑 $E_f x(t_f) = 0$ 形式的约束就更复杂了. 要想在延伸的区间上把约束变成 $E_f x(t_1) = 0$, 而得到较为简洁的结果是不可能的; 看来应该把约束改变为 $E_f \Phi(t_f, t_1)x(t_1) = 0$, 这里的 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 依赖于被选定的特殊的 $F(\cdot)$.

2.5 Riemann-Stieltjes 不等式的极值解

在这节中，我们研究在 $[t_0, t_f]$ 内的不等式 $dM(P) \geqslant 0$, 并要确定此不等式的极大和极小解. 首先，我们给出如下结果:

定理 II.5.1 对于由 (3.1) 式和 (3.2) 式所决定的无约束

极小化问题来说（$x(t_0)$ 是任意确定的，而 $x(t_f)$ 是自由的），假设对于某个终端加权矩阵 S_f，以及对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0, t_f]$，存在 $V^*[x(t), t]=x'(t)P^*(t)x(t)$. 那么，对于任何使 $dM(P)\geqslant 0$ 和 $P(t_f)\leqslant S_f$ 的 $P(\cdot)$，有

$$P(t; P(t_f)\leqslant S_f)\leqslant P^*(t; P^*(t_f)=S_f)$$

$$\forall t\in[t_0, t_f] \tag{5.1}$$

（这些符号的含意是清楚的；虽然这里可能不需要这样复杂，但这种写法以后是有用的）

证明 从定理 3.2 的证明中可以知道，对于 $t\in[t_0, t_f]$

$$\int_t^{t_f}[x'(t)\ u'(t)]dM(P)\begin{bmatrix}x(t)\\u(t)\end{bmatrix}=x'(t_f)P(t_f)x(t_f)$$

$$-x'(t)P(t)x(t)+\int_t^{t_f}[x'Q(\tau)x+2x'H(\tau)u$$

$$+u'R(\tau)u]d\tau$$

所以

$$V[x(t), t\ \ u(\ )]=x'(t)P(t)x(t)+x'(t_f)[S_f-P(t_f)]x(t_f)$$

$$+\int_t^{t_f}[x'(t)u'(t)]dM(P)\begin{bmatrix}x(t)\\u(t)\end{bmatrix}$$

利用关于 $P(\cdot)$ 的条件，可以得出

$$V[x(t), t, u(\ )]\geqslant x'(t)P(t)x(t)$$

便直接推出方程 (5.1).

我们知道，$P^*(\cdot)$满足 $dM(P^*)\geqslant 0$ 和 $P^*(t_f)\leqslant S_f$; 所以 $P^*(\cdot)$ 是具有这种性质的 $P(\cdot)$ 中最大的（这次序由 (5.1) 所决定）.

我们用以下方法来求最小的 $P_*(\cdot)$.

定理 II.5.2 定义性能指标为

$$V_0[x(t), t, u(\cdot)]=\int_{t_0}^{t}[x'Qx+2x'Hu+u'Ru]dt$$

$$-x'(t_0)S_0x(t_0) \tag{5.2}$$

其中 $x(t)$ 是任意固定的，$x(t_0)$ 是自由的，以及 $u(\cdot)$ 是自由的．令

$$V_*[x(t),t]=\inf_{u(\cdot)}V_0[x(t),t,u(\cdot)] \tag{5.3}$$

若对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0,t_f]$，存在 $V_*[x(t),t]$，那么，对于定义在 $[t_0,t_f]$ 上的某个 $P_*(t)$ 有 $V_*[x(t),t]=-x'(t)P_*(t)x(t)$．此外还存在 $P(\cdot)$，使得在 $[t_0,t_f]$ 内有 $dM(P)\geqslant 0$ 和 $P(t_0)\geqslant S_0$，同时 $P_*(\cdot)$ 就是如下的一些 $P(\cdot)$ 中的最小者：

$$P(t;P(t_0)\geqslant S_0)\geqslant P_*(t;P_*(t_0)=S_0)$$
$$t\geqslant[t_0,t_f] \tag{5.4}$$

反之，若存在 $P(\cdot)$，使得在 $[t_0,t_f]$ 内有 $dM(P)\geqslant 0$ 和 $P(t_0)\geqslant S_0$，那么，对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0,t_f]$，$V_*[x(t),t]$ 存在．

这个定理的证明可以通过对定理 5.1 和定理 3.3 中的时间的逆转来得到，在这些定理中把 V^* 的存在性和满足在 $[t_0,t_f]$ 内 $dM(P)\geqslant 0$，$P(t_f)\leqslant S_f$ 的 $P(\cdot)$ 的存在性联系了起来．

定理 II.5.2′ 还提供了对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0,t_f]$，使 $V^*[x(t),t]$ 存在的那些终端加权矩阵 S_f 的信息．事实上引进这个定理不是因为它本身的内容，而正是为了提供这个信息．

定理 II.5.3 用上面的那些符号，设 $V_*[x(t),t]$ 对于所有的 $x(t)$，所有的 $t\in[t_0,t_f]$，以及某个 S_0 都存在．那么，对于所有的 $\bar{S}_0\leqslant S_0$，它也是存在的．而且对于某个 $\bar{S}_0\leqslant S_0$，以及所有满足

$$S_f\geqslant P_*(t_f;P_*(t_0)=\bar{S}_0) \tag{5.5}$$

的 S_f，$V^*[x(t),t]$ 也存在．如果对于所有的 $\bar{S}_0\leqslant S_0$ 和某个 S_f，(5.5) 式不成立，那么，对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0,t_f]$，$V^*[x(t),t]$ 不存在．

证明 从(5.2)式中可以看到 $V[x(t),t]$ 是随着 S_0 的减少而增加的．所以，$V_*[x(t),t]=-x'(t)P_*(t)x(t)$ 也随 S_0 的减少而增加．若 $V_*[x(t),t]$ 对于某个 S_0 是存在的，那么，对于所有的 $\bar{S}_0\leqslant S_0$，它也是存在的(而且可以看出，对于每个确定的 t，$P_*(t;P_*(t_0)=S_0)$ 是随 S_0 单调变化的)．这证明了第一点．

为了证明第二点，假设对于某个 $\bar{S}$，(5.5)式是成立的．那么，$P(t)=P_*(t;P_*(t_0)=\bar{S}_0)$ 是使 $dM(P)\geqslant 0$ 和 $P(t_f)\leqslant S_f$ 的．根据定理 3.3，对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0,t_f]$，$V^*[x(t),t]$ 存在．

反之，假设对于某个 S_f 和所有的 $\bar{S}_0\leqslant S_0$，(5.5)式不成立，但是对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0,t_f]$，$V^*[x(t),t]$ 存在．我们将得到一个矛盾．令 $\hat{S}_0=P^*(t_0)$．于是，由于在 $[t_0,t_f]$ 内有 $dM(P^*)\geqslant 0$ 和 $P^*(t_0)\geqslant\hat{S}_0$，根据定理5.2，在(5.2)式中用 $\hat{S}_0$ 代替 S_0，我们就有 $V_*[x(t),t]$ 对于所有的 $x(t)$ 和 $t\in[t_0,t_f]$ 是存在的．而且根据(5.4)式，对于所有的 $t\in[t_0,t_f]$，有

$$P^*(t)\geqslant P_*(t;P_*(t_0)=\hat{S}_0)$$

令 $t=t_f$，就有 $S_f\geqslant P_*(t_f;P_*(t_0)=\hat{S}_0)$．而对于某个适当负的 $\bar{S}_0$，$\bar{S}_0\leqslant\hat{S}_0$ 和 $\bar{S}_0\leqslant S_0$．则

$$P_*(t_f;P_*(t_0)=\bar{S}_0)\leqslant P^*(t_f;P_*(t_0)=\hat{S}_0)\leqslant S_f$$

这就得到一个矛盾．定理证毕．

评注 5.1 1. 由于 $P_*(t;P_*(t_0)=S_0)$ 关于 S_0 是单调的，可以看出，任何满足 $S_f\geqslant P_*(t_f;P_*(t_0)=-nI)$ 的 S_f(其中 n 是某个任意大的数)，都能使相应的 $V^*[x(t),t]$ 在 $[t_0,t_f]$ 上存在．同样地，对于任意大的数 n，任何满足 $S_0\leqslant P_*(t_0;P^*(t_f)=nI)$ 的 S_0，都能使相应的 $V_*[x(t),t]$ 在 $[t_0,t_f]$ 上存在．

2. 对于所有的或者部分的状态向量在 t_0, t_f 点受到约束的有约束极小化问题也可以得到某些结果. 其中最有意义的是从上述三个定理中容易推出

$$P_*(t; x(t_0)=0) \leqslant P(t) \leqslant P^*(t; x(t_f)=0) \quad (5.6)$$

在这个不等式中,假定所需的可控性条件是满足的,以及不等式的第一和第三项分别地在区间$(t_0, t_f]$和$[t_0, t_f)$上是有定义的. $P(t)$是在$[t_0, t_f]$上使 $dM(P) \geqslant 0$ 的任意一个解. 这个不等式使人联想起了定常问题的某些已知结果,参看文献[15]. 这节的大部分结果最早出现在文献[16]中.

2.6 结 束 语

这一章的主要工作在于证明了为了某些线性二次最优问题有解，有着用某个 Riemann-Stieltjes 积分的非负性来表示的既充分又必要的条件. 这些问题虽然与那些在文献中经常讨论的问题紧密相关，但与它们并不是等同的；而且，它们本身具有内在的鲁棒性，这使它们从定性的观点看来是适定的.

第一组结果是关于初始时间或初始状态的鲁棒性的，第二组结果是关于终端时间或终端约束状态的鲁棒性的. 在后半部分我们证明了对于鲁棒的问题可以使用罚函数的思想，而且只有鲁棒的问题才可使用这一概念.

在数学上严密的推导和关于问题定性的（适定性的）合理假定下，我们提出了一种把线性二次极小化问题看成为标准问题的观点.

我们还指出了 Riemann-Stieltjes 条件对于更多的线性二次控制问题的适用性，包括从零初始状态到指定的非零终端状态之间所要求的转移. 这一推广由时间逆转是容易得到

的．因而，在把可以用包含 Riemann-Stieltjes 积分的不等式来分析的各类问题联系起来的过程中，有可能描述这种不等式的极值解的一些性质．

参 考 文 献

[1] J. B. Moore and B. D. O. Anderson, "Extensions of quadratic minimization theory, I: Finite time results", *Int. J. Control,* Vol. 7, No. 5, 1968, pp. 465—472.

[2] D. H. Jacobson, "Totally singular quadratic minimization problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-16, 1971, pp. 651—658.

[3] B. D. O. Anderson, "Partially singular linear-quadratic control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-18, 1973, pp. 407—409.

[4] B. P. Molinari, "Nonnegativity of a quadratic functional", *SIAM J. Control,* Vol. 13, 1975, pp. 792—806.

[5] W. A. Coppel, "Linear-quadratic optimal control, *Proc. Roy. Soc. Edin.,* Vol. 73A, 1974—5, pp. 271—289.

[6] D. J. Clements, B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Matrix inequality solution to linear-quadratic singular control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-22, 1977, pp. 55—57.

[7] D. H. Jacobson and J. L. Speyer, "Necessary and sufficient conditions for singular control problems: a limit approach", *J. Math. Anal. Appl.,* Vol. 34, 1971, pp. 239—266.

[8] R. W. Brockett, Finite Dimensional Linear Systems, John Wiley, New York, 1970.

[9] P. A. Faurre, "Sur les points conjugues en commande optimale", *C. R. Acad. Sci.,* Ser. A, Vol. 266, 1968, pp. 1294—1296.

[10] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, Calculus of Variations, Prentice-Hall, N. J., 1963.

[11] B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Spectral factorization of a finite-dimensional nonstationary matrix covariance", *IEEE Trans Automatic Control,* Vol. AC-19, 1974, pp. 680—692.

[12] B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Synthesis of linear time-varying passive networks", *IEEE Trans. Circuits and Systems,* Vol. CAS-21, 1974, pp. 678—687.

[13] D. G. Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., London, 1973.

[14] B. D. O. Anderson and D. J. Clements, "Robust linear-quadratic minimization", *J. Math. Anal. Appl.,* to be published.

[15] J. C. Willems, "Least squares stationary control and the algebraic Riccati equation", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-16, 1971, pp. 621—234.

[16] D. J. Clements and B. D. O. Anderson, "Extremal solutions of Riemann-Stieltjes inequalities of linear optimal control", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-22, 1976. pp. 139—140.

第三章　线性二次奇异控制的算法

3.1 引　　言

在这一章中，将要介绍无端点约束的线性二次奇异控制问题的最优控制的存在性及其计算方法．为此，先考虑一个较为简单的问题，这就是在线性常微分方程约束下，寻求二次指标泛函具有不依赖于控制函数的下界的充分必要条件．

仍考虑由方程 (II.3.1) 和 (II.3.2) 所决定的系统和指标．为了方便起见，把这些方程重新写在下面．其指标泛函和动力学系统为

$$V[x_0,t_0,u(\cdot)]=\int_{t_0}^{t_f}[x'Q(t)x+2x'H(t)u+u'R(t)u]dt + x'(t_f)Sx(t_f) \tag{1.1}$$

和

$$\dot{x}=F(t)x+G(t)u \quad x(t_0)=x_0 \tag{1.2}$$

对于其中的系数矩阵和控制，我们作和上一章一样的一些假定．不过，这里还进一步假定了 F，G 等矩阵都是充分可微的，以便进行以后要用到的某些变换(在这些变换中包含着微商)．由于不同的问题所要进行变换的次数也不同，因而要求系数矩阵可微的阶数也是不一样的．在本章所介绍的算法进行到每一阶段时，再来说明为实现这一步所应要求的可微性的阶数(如果只考虑算法的一个完整的循环，那么，Q，R，F 和 G 连续可微，以及 H 二阶连续可微就足够了)．除了这一类

假定以外，有时我们还要进一步假设由 F, G 等所组成的某些矩阵在 $[t_0, t_f]$ 上的秩具有不变性.

用 U 表示容许控制的集合. 和第二章中一样，我们感兴趣的是：在(1.2)式的条件下，寻求

$$V[O, t_0, u(\cdot)] \geqslant 0, \text{ 对于每个 } u(\cdot) \in U \tag{1.3}$$

的充分必要条件. 如果对于所有的 $t \in [t_0, t_f]$, $R(t) > 0$，也就是问题是非奇异的，那么，这是很容易解决的. 从而，有兴趣的是 $R(t) \equiv 0$ (完全奇异)的情形，以及 $R(t)$ 不等于零，但在 $[t_0, t_f]$ 内的某些地方是奇异的(部分奇异的)情形.

我们再强调一下：问题(1.3)在第二章中已经见到过了，在那里主要是研究一般的存在性条件. 而这里，我们的兴趣是如何用构造性的方法来决定(1.3)式成立与否. 为此，需要考虑一种比第二章中所讨论过的情形受到更多限制条件的问题(这是指要求可微性和秩的不变性条件成立).

历史上已经证实这问题在某些领域内是很重要的. 它是最优控制的二阶变分问题[1]，它和线性二次控制问题紧密地联系着[2],[3]. 它还出现在与协方差因式分解相对偶的控制问题中[4,5,6]，最后在网络综合中，无源性的一种定义也会引出类似的问题[7].

然而，最初这个问题是作为最优控制的二阶变分问题来研究的. 在飞行轨道优化问题中，要想从所考虑的极小弧中排除奇异的极值曲线，就需要有比经典的 Legendre-Clebsch 条件更强的必要条件. 有关这个问题的详细的历史材料可见综述性文献[8,9,10]，以及其中的参考资料. 在这些研究工作中提出了广义的 Legendre-Clebsch 条件，对于完全奇异的情形，它可以写成

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}\right)' = 0 \quad \text{在 } [t_0, t_f] \text{ 上} \tag{1.4}$$

$$-\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}\right)' \geqslant 0 \quad 在[t_0, t_f]上 \tag{1.5}$$

其中$\mathscr{H}$是由(1.1)式和(1.2)式确定的哈密顿函数，也就是

$$\mathscr{H} = x'Q(t)x + 2x'H(t)u + \lambda'(F(t)x + G(t)u) \tag{1.6}$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x} \tag{1.7}$$

其中λ是协状态向量．若(1.5)式是等式情形，那么，可以把推导(1.4)和(1.5)式的过程继续进行下去，以便给出进一步的必要条件．通常，这些必要条件是

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^q}{dt^q}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}\right)' = 0$$

$$在[t_0, t_f]上, q < 2p \tag{1.8}$$

$$(-1)^p \frac{\partial}{\partial u}\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}\right)' \geqslant 0$$

$$但在[t_0, t_f]上不全为零 \tag{1.9}$$

这里$\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}\right)'$是$\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}\right)'$对时间的导数中，显含控制$u$的某个分量的（即其系数不为零的）最低阶者．对标量$u$，整数$p$就称为奇异弧的阶数；对于$u$是向量的情形，需要把上述定义加以推广．

条件(1.8)，(1.9)最早是由 Kelly 仅仅对于标量控制的情形推导出来的(见参考文献[12,13])．对于这种情形，不难证明：当q是奇数时，(1.8)式是自动满足的．最初的推导利用了构造特殊变分和比较同阶项的经典方法[12]．在文献[13]和文献[14]中，介绍了推导(1.9)式的变换技巧，这就是这里所要研究的，关于向量控制的一般情形的变换．

应该注意，从标量情形过渡到向量情形通常是很困难的．为了说明为什么这种推广并非显然，可以考察(1.5)式．在标

量情形，只有两种可能性：等式（可以导出(1.8)和(1.9)式）或不等式．而在向量控制的情形，实质上可以出现三种可能性；(1.5)式等式成立（和以前一样，可以导出(1.8)式和(1.9)式，至少也是其中的某些方程），或者(1.5)式中的不等式严格地成立（如同标量控制的情形一样），或者(1.5)式中的不等式不严格地成立，即(1.5)式左边的矩阵是奇异的，但不为零．为了应付这种情况，就要对(1.8)式和(1.9)式作某种修正．在谱分解的对偶问题中，虽然向量问题现在已经解决了，但比起标量情形，它所花费的时间要长的多；这个事实也说明从标量到向量的推广并非易事．尽管如此，已经得到了有关向量控制问题的一些结果；广义的 Legendre-Clebsch 条件的一般形式已经由 Robbins[11] 和 Goh[15] 推导出来（正如上面所提到的，(1.8)式和(1.9)式已经不能充分概括所有各种可能性）．Robbins 的方法实质上是变分的方法，而 Goh 在处理方法上用的是关于状态和控制的变换，这是他在变分学中对奇异的 Bolza 问题所作研究工作的一个应用[6]．虽然，Kelley 和 Goh 都用了变换的方法，但在变换的形式上却有很大的差别．Kelley 的变换是用某个含有比原来维数更低的状态变量的性能指标和线性系统方程去代替原来的性能指标和系统方程．而 Goh 却保持了状态空间的维数，而且除了所谓的广义 Legendre-Clebsch 条件外还提出了一些附加的约束条件．这些附加的约束条件已经在文献[17]中详细地考察过了．

如上所述，在这章里我们感兴趣的是在(1.2)式的条件下，(1.3)式成立的充分必要条件，比起定理II.3.1和定理II.3.2中的充分条件和必要条件来，这些条件的适用性就更有限了．这种局限性就是由于要求具有一定的可微性和秩的不变性而引起的；这些条件的优点在于计算具有自由的 $x(t_0)$，且由(1.1)，(1.2)式所确定的最优性能指标和最优控制时是相当

好用的.

这些条件在以下几个方面与以往的工作是一致的.首先,它们是在文献[18]中所发表的条件的推广,这些条件适用于一阶奇异的标量控制问题.其次,这些条件是用 Kelley 变换的向量形式的推广而得到的(应该指出,Kelley 变换是局限于标量控制的).第三,为了得到这些条件所要求的各个步骤在很大程度上是 Anderson 和 Moylan 在文献[5]和文献[7]中关于非控制问题所用过的那些算法的对偶.我们将进一步讨论这个算法.

构造上一章中所述的 Riemann-Stieltjes 不等式中的矩阵 P 的问题是协方差因式分解和时变无源网络综合问题的关键.近来在文献[19]中提出了一个适合于定常情形的算法,并且看到在作了一些修改之后,这种算法也适用于时变的综合问题[7],在作另外一些修改之后,它又适用于协方差因式分解问题[5].事实上,文献[5]中提出了在附加上可微性和秩的不变性的假定之后,寻找这样的矩阵 P 的算法.在这里,我们要指出:Anderson-Moylan 算法正好就是在一组特定的坐标基上所完成的向量情形的 Kelley 变换,在证明这类的过程中,我们用相当直接的办法推导了广义的 Legendre-Clebsch 条件.

在 $x(t_0)$ 自由的最优控制问题中,独立于 Kelley 变换,Anderson-Moylan 算法可以给出最优性能指标.把它与 Kelley 变换连系起来,还能得到最优控制.

最后,谈谈文献[20—23]中的工作.在文献[20]中,奇异调节器问题是通过求得用 $\varepsilon \to 0$ 时的正则化问题的渐近解来进行研究的(参考定理 II.3.2 前的说明).所用的方法是常微分方程中奇异摄动理论的那些方法.文献[21]中的工作部分地但还不是完整地谈到了某些这里所提到的问题,而我们只是在完成了本章的研究之后才知道该文.参考文献[22,23]

包含了本章的许多内容.

现在,我们概括地叙述一下本章的结构,第二节涉及到控制问题一种标准型的推演,在这过程中,控制空间维数可能会有所降低. 第三节是研究关于标准型情形的非负性问题的一般的 Kelley 变换,推导了广义的 Legendre-Clebsch 条件,以及关于非负性问题解的存在性的一组充分必要条件. 在这过程中,状态空间的维数会有所减少. 在第四节里,把第二节和第三节的结果用于线性二次最优控制问题. 利用一系列使控制和(或)状态空间的维数不断减少的变换,来计算出极小化的(或下确界的)控制及其对应的最优指标. 第五节中的结果是把用于协方差因式分解的对偶问题中的算法与第四节中的算法连系起来;这里,大量地应用了前一章的 Riemann-Stieltjes 不等式. 第六节是小结.

3.2 控制空间维数的降低和标准型

本节主要是说明怎样才能排除一些多余的控制, 以及在除去这些控制之后, 怎样设置矩阵 R 和 G 的标准型. 所有这些都是借助于输入和状态空间的坐标基底变换来完成的; 除此而外, 还需要引用可微性和秩不变性的假定.

首先,我们给出一些初步而简单的结果.

1. 在满足(1.2)式,且初条件为 $x(t_0)$ 的条件下,指标(1.1)的极小化问题等价于在满足(1.2)式且初条件为 $x(t_0)$ 的条件下,用 $\bar{u}(t)=U^{-1}(t)u(t)$, $\bar{R}(t)=U'(t)R(t)U(t)$, $\bar{H}(t)=H(t)u(t)$ 和 $\bar{G}(t)=G(t)U(t)$ 代替 $u(t)$, $R(t)$, $H(t)$ 和 $G(t)$ 以后,指标(1.1)的极小化问题, 其中 $U(t)$ 是任意一个在 $[t_0, t_f]$ 上连续的非奇异矩阵. 这一点相当于对控制空间的基底进行了变换.

2. 在满足(1.2)式，且初条件为 $x(t_0)$ 时，指标(1.1)的极小化问题等价于在满足(1.2)式，且初条件为 $U(t_0)x(t_0)$的情形下，用$\bar{x}(t)=U(t)x(t)$, $\bar{F}(t)=U(t)F(t)U^{-1}(t)+\dot{U}(t)U^{-1}(t)$, $\bar{G}(t)=U(t)G(t)$, $\bar{H}(t)=[U^{-1}(t)]'H(t)$, $\bar{Q}(t)=[U^{-1}(t)]'Q(t)U^{-1}(t)$ 和 $\bar{S}=[U^{-1}(T)]'SU^{-1}(T)$代替 $x(t)$, $F(t)$, $H(t)$, $G(t)$, $Q(t)$和 S 以后，指标(1.1)的极小化问题，其中 $U(t)$ 是任意一个在$[t_0, t_f]$上连续可微的非奇异矩阵. 这一点相当于对状态空间的基底进行了变换. 应该注意，在论述 1 中，$U(t)$ 连续就足够了，而在论述 2 中要有更强的连续可微性条件. 这时具体的变换过程如下:

步骤 1

假定 1 $R(t)$在 $[t_0, t_f]$ 上有着不变的秩 r.

在这个假定条件下，利用 Dolezl 定理 (见附录 A)，在 $[t_0, t_f]$ 上就必定存在一个连续的非奇异矩阵 $U(t)$，使得

$$\bar{R}(t) \triangleq U'(t)R(t)U(t)=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

用这个 $U(t)$ 来对控制空间的基底作变换.

步骤 2

把G分成为 $[G_1\ \ G_2]$，其中 G_1 是 $n\times r$ 阶的矩阵.

假定 2 $G_2(t)$ 有着不变的秩 $s\leqslant m-r$. 若 $s=m-r$，则进行步骤3. 否则，再利用 Dolezal 定理，在 $[t_0, t_f]$ 上存在一个连续的非奇异矩阵 $V_0(t)$，使得 $G_2(t)V_0(t)=[\hat{G}_2(t)\ \ 0]$，其中 $\hat{G}_2(t)$ 有 s 列. 令 $V(t)=I\oplus V_0(t)$，其中单位矩阵是 r 维的. 用这个 $V(t)$ 对控制空间的基作变换. 然后，把 R, G 和H写成如下的分块形式

$$R(t)=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}$$

$$G(t) = [G_1(t) \ \ \hat{G}_2(t) \ \ 0_{n\times(m-r-s)}]$$

$$H(t) = [H_1(t) \ \ H_2(t) \ \ H_3(t)]$$

令 $u'(t) = [\hat{u}'(t)u_3'(t)]$，其中 $\hat{u}(t)$ 是 $r+s$ 维的，根据(1.1)式和(1.2)式，可以得到

$$V[x_0, t_0, u(\cdot)] = x'(t_f)Sx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \{x'Qx + 2x'\hat{H}\hat{u}$$

$$+ \hat{u}'\hat{R}\hat{u}\}dt + 2\int_{t_0}^{t_f} x'H_3u_3dt \tag{2.2}$$

$$\dot{x} = Fx + \hat{G}\hat{u} \tag{2.3}$$

其中

$$\hat{R}(t) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{s\times s} \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}(t) = [G_1(t) \ \ \hat{G}_2(t)]$$

$$\hat{H}(t) = [H_1(t) \ \ H_2(t)]$$

现在我们集中研究(2.2)式中的最后一项：

引理 III.2.1 对于所有的 $u(\cdot)$，$V[0, t_0, u(\cdot)]$ 是非负的必要条件是对于所有的，自 $x(t_0) = 0$ 出发并在 $t \in [t_0, t_f]$ 时可达的状态 $\xi(t)$，有 $\xi'(t)H_3(t) = 0$. 对于所有的 x_0，$V^*[x_0, t_0]$ 为有限的必要条件是对于 $t \in [t_0, t_f]$，有 $H_3(t) = 0$.

证明 假设 $t < t_f$. 在$[t_0, t]$上令 $\hat{u}_\xi$ 使 $x(t_0) = 0$ 转移到 $x(t) = \xi(t)$. 在 $[t, t_f]$ 上取 $\hat{u}_\xi \equiv 0$，在 $[t, t+\varepsilon]$ 上(其中 $\varepsilon > 0$ 是一个小量)有 $u_3 = v$，而在其他地方 u_3 都是零。于是

$V[0, t_0, u(\cdot)] =$ 常数$+2\varepsilon\xi'(t)H_3(t)v + \varepsilon$ 的高阶项

除非 $\xi'(t)H_3(t) = 0$，否则，适当选择 v，就可以得到与 $V[0, t_0, u(\cdot)]$ 的非负性相矛盾的结果. 考虑到从某个 x_0 出发，在时间 t，所有状态都是可达的，就能得到引理的第二部分，所以，在$[t_0, t_f)$上 $H_3(t) = 0$，由于连续性，在 $[t_0, t_f]$ 上也是如此。

若引理中的条件不成立，那么，就不必再检验非负性条件，或者有有限下确界的条件了．若引理中的条件成立，那么，在检验非负性条件时，不失一般性，可以假设在 $[t_0, t_f]$ 上 $H_3(t)\equiv 0$(因为性能指标仍是原来的)．于是，u 的分量 u_3 可以省去，简单地把 $\hat{u}$ 看成 u，就得到了一个与原有问题形式相同的问题，但它的控制空间的维数较低．很清楚，在线性二次控制问题里，这一步相当于扔掉了那些不会通过(2.3)式而影响状态变量，且不直接出现在(2.2)式里的那些控制．

步骤 3

利用 $\hat{G}_2(t)$ 有 s 列，且秩也为 s 这一点，根据 Dolezal 定理，必定存在一个在 $[t_0, t_f]$ 上连续的非奇异矩阵 $T_0(t)$，使得 $T_0(t)\hat{G}_2(t)=[0' \ \ I_{s\times s}]'$．令 $T(t)=I_r\oplus T_0(t)$．为了对状态空间进行基的变换，$T(t)$ 连续还是不够的，而 Dolezal 定理保证 $T_0(t)$ 有着与矩阵 $G_2(t)$ 相同的可微阶数；因此，我们规定：

假定 3 $G(t)$ 具有连续可微的元素．

利用 $T(t)$ 作状态空间基的变换．

这样三步的最终结果是

$$R=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & I_s \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

其中 G_{21} 是 r 列的，这样作是依赖于假定 1—3，以及关于非负性或有限下确界的假定． 注意， 决定该问题的其他矩阵并没有什么特殊形式．还应注意的是不论是否有某些控制被消除，(2.4)式总成立．

若 R 和 G 有着(2.4)式的形式，我们就称这种控制问题具有标准型． 于是， 状态变量 x 很自然地可写成分块的形式 $[x_1' \ x_2']'$，其中 x_2 是 s 维的，而控制向量可写成 $[u_1' \ u_2']'$，其中 u_2 也是 s 维的．我们把 u_1 和 u_2 相应地称为非奇异控制和奇异控

制；所以这样命名，因为给定 R 的形式为(2.4)式后，性能指标中出现二次项 $u_1'u_1$，而向量 u_2 最多通过 $x'Hu$ 项以线性的形式出现在其中. 而且，奇异控制的各个分量均独立地影响状态 x_2(从(2.4)式中可以清楚地看到这一点)以及指标泛函(1.1)式.

3.3 Kelley 变换的向量形式

在这一节里，我们将把 Kelley 变换推广到向量的情形，而所讨论的问题就是上节中推导的标准型的问题. 从经过变换的问题出发，导出广义的 Legendre-Clebsch 条件，然后论证. 把 Kelley 变换用到我们的问题上去可以导出它有解的充分必要条件. 这些条件包括由形式相同，但状态空间维数较低的问题的解的存在性，一组端点约束和对应于方程(1.4)的广义的 Legendre-Clebsch 条件.

本节将基本上按照文献[14]和文献[18]那样来进行，但按文献[22, 23]中那样将之推广到向量的情形. 假设给定了指标(1.1)和系统(1.2)，其中 R 和 G 由(2.4)式所决定，我们感兴趣的是在(1.2)式的条件下，寻求(1.3)式成立的必要条件. 引进标量 W_0:

$$\dot{W}_0 = x'Qx + 2x'Hu + u'Ru,\quad W_0(t_0) = 0, \tag{3.1}$$

把问题变成 Mayer 形式. 这时方程(1.2)和(3.1)给出了关于变量 W_0 和 x 的一组 $(n+1)$ 个微分方程. 回顾 R 和 G 的标准型，以及 u 和 x 的分块形式，显然，(3.1)式中只包含 u_2 的线性项，而不包含它的二次项. 根据(1.2)和(2.4)的分块形式，以及 F_{11} 等的明显意义，有

$$\dot{x}_1 = F_{11}x_1 + F_{12}x_2 + G_{11}u_1 \tag{3.2}$$

$$\dot{x}_2 = F_{21}x_1 + F_{22}x_2 + G_{21}u_1 + u_2 \tag{3.3}$$

可以看出，u_2 仅仅是通过(3.3)式间接地影响着(3.2)式． 显然，如果(3.1)式根本不含 u_2 的项，那么，原来的问题从直观上看就可以用一个维数比 x 要低的状态变量 x_1 以及控制变量 x_2 和 u_1 所构成的问题来代替，因为 u_2 实质上是 x_2 的微分．

考虑到这一情况，我们力图寻找一个变换，新的变量是 z_0, z_1 和 z_2，这里 z_0 是一个标量，而 $z = [z_1' \ z_2']'$ 是 n 维向量 z 的相应的分块形式，使得 z_0 和 z_1 的动力学方程与 u_2 无关．(这样一来，z_0 起着性能指标的作用，而 z 起着状态变量的作用)．假设我们让

$$
\begin{aligned}
z_0 &= h_0(W_0, x_1, x_2) \\
z_1 &= h_1(W_0, x_1, x_2) \\
z_2 &= h_2(W_0, x_1, x_2)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

并设 h_0, h_1 和 h_2 关于 W_0, x_1 和 x_2 的一阶偏导数都存在；那么，$z_i(i = 0, 1, 2)$ 的动力学方程可以写成

$$
\dot{z}_i = \frac{\partial h_i}{\partial W_0} \dot{W}_0 + \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_1}\right)' \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_2}\right)' \dot{x}_2 \tag{3.5}
$$

这里 $\left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)$ 是列向量，而 $\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)$ 是以 h_1 的第 i 个分量的梯度为第 i 列的矩阵．

对于 $i = 0, 1$ 的情形，用(3.1)式，(3.2)式和(3.3)式代入(3.5)式中，并让 u_2 的系数等于零，就可以得到 $\dot{z}_0$ 和 $\dot{z}_1$ 与 u_2 无关的充分必要条件．

$$
\frac{\partial h_0}{\partial W_0}(2x_1'H_{12} + 2x_2'H_{22}) + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x_2}\right)' = 0 \tag{3.6}
$$

$$
\frac{\partial h_1}{\partial W_0}(2x_1'H_{12} + 2x_2'H_{22}) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right)' = 0 \tag{3.7}
$$

这样，我们就要去寻找满足偏微分方程(3.6)和(3.7)的函数 h_0和h_1． 处理这类问题的典型办法是特征线方法[27]，其过程如下：假设变量 θ 是一个向量，且使 h_0 和 h_1 在由 θ 值的变

化所形成的表面上是常数，也就是

$$\frac{\partial h_0}{\partial\theta}=0,\qquad \frac{\partial h_1}{\partial\theta}=0.$$

于是，从(3.6)式和(3.7)式可以看到，倘若

$$\left(\frac{\partial W_0}{\partial\theta}\right)'=2x_1'H_{12}+2x_2'H_{22}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial\theta}=I$$

则这些方程成立．注意到最后一个方程式，让 $\theta=x_2$，那么其他两个方程就成为

$$\left(\frac{\partial W_0}{\partial x_2}\right)'=2x_1'H_{12}+2x_2'H_{22}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}=0$$

若 H_{22} 是对称的，则上述方程可以给出封闭形式的解

$$x_1=c_1 \tag{3.8}$$

$$W_0=2c_1'H_{12}x_2+x_2'H_{22}x_2+c_0 \tag{3.9}$$

其中 c_0 和 c_1 是任意常数．按照标准的方法可以看到，利用(3.8)式和(3.9)式，可以把 c_0 和 c_1 表示成 x_1 和 x_2 的函数，而且这些函数就构成了方程(3.6)和(3.7)的一组相互独立的解．总而言之，现在我们得到了一组所要的变换

$$z_0=W_0-2x_1'H_{12}x_2-x_2'H_{22}x_2 \tag{3.10}$$

$$z_1=x_1 \tag{3.11}$$

$$z_2=x_2 \tag{3.12}$$

其中(3.10)式和(3.11)式是根据(3.8)式和(3.9)式得来的，而 z_2 可任意选取．这个变换是非奇异的，因为其 Jacobian 行列式等于 1．

应该注意，仅当 H_{22} 是对称的时，才有封闭形式的解(3.9)．在 Kelley 所考虑的标量控制问题里，u_2 和 x_2 是标量，因此 H_{22} 也是标量，这样一来，就没有什么困难了．但是，一般说来，对于(1.1)式中的 H_{22} 并没有什么既定的对称条件．代替(3.10)式，我们考虑变换

$$z_0 = W_0 - 2x_1'H_{12}x_2 - x_2'H_{22}^s x_2 \tag{3.13}$$

这里 H_{22}^s 是 H_{22} 的对称部分，在以后的讨论和附录 B 中，我们要证明非负性条件 (1.3) 将迫使 H_{22} 是对称的(在第五节中介绍了另一种证明其对称性的方法)． 其对称性质实际上是与对应于(1.8)式的 $q = 1$ 时的广义 Legendre-Clebsch 条件相关的．

从(3.11)式和 (3.12) 式可以看出，z_1 和 z_2 的动力学特性和 x_1，x_2 的动力学特性是一样的．z_0 的动力学方程可以直接计算．利用 z_1，z_2 和 x_1，x_2 的等价性，我们可以得到

$$\dot{z}_0 = x_1'\hat{Q}x_1 + 2x_1'\hat{H}_1x_2 + 2x_1'\hat{H}_2u_1 + x_2'\hat{R}_1x_2 + 2x_2'\hat{R}_2u_1 + u_1'u_1 + x_2'H_{22}^A u_2 \tag{3.14}$$

其中

$$\hat{Q} = Q_{11} - H_{12}F_{21} - F_{21}'H_{12}'$$
$$\hat{H}_1 = Q_{12} - F_{11}H_{12} - H_{12}F_{22} - \dot{H}_{12} - F_{21}H_{22}^s$$
$$\hat{H}_2 = H_{11} - H_{12}G_{21}$$
$$\hat{R}_1 = Q_{22} - F_{12}H_{12} - H_{12}'F_{12} - F_{22}H_{22}^s - H_{22}^sF_{22} - \dot{H}_{22}^s$$
$$\hat{R}_2 = H_{21} - H_{12}'G_{11} - H_{22}^sG_{21}$$

H_{22}^A 是 H_{22} 的反对称部分 (3.15)

从(3.14)式中现在可以清楚看到，除了最后一项 $x_2'H_{22}^A u_2$ 以外，$\dot{z}_0$ 是不依赖于奇异控制 u_2 的．

至此，我们仅仅考虑了新变量的动力学方程；现在再来讨论边界条件．我们要求变换(3.13)在闭区间$[t_0, t_f]$上成立，因此在 t_0，t_f 时刻相应地有

$$z_0(t_0) = W_0(t_0) - 2x_1'(t_0)H_{12}(t_0)x_2(t_0) - x_2'(t_0)H_{22}^s(t_0)x_2(t_0) \tag{3.16}$$

$$z_0(t_f) = W_0(t_f) - 2x_1'(t_f)H_{12}(t_f)x_2(t_f) - x_2'(t_f)H_{22}^s(t_f)x_2(t_f)$$

注意到 $V[0, t_0, u(\cdot)] = x'(t_f)Sx(t_f) + W_0(t_f) - W_0(t_0)$ 以及 $x_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0$，从(3.14)式和(3.16)式可以得到

$$V[0, t_0, u(\cdot)] = x'(t_f)Sx(t_f) + 2x_1'(t_f)H_{12}(t_f)x_2(t_f) + x_2'(t_f)H_{22}^s(t_f)x_2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}\{x_1'\hat{Q}x_1 + 2x_1'\hat{H}_1x_2 + 2x_1'\hat{H}_2u_1 + x_2'\hat{R}_1x_2 + 2x_2'\hat{R}_2u_1 + u_1'u_1\}dt + \int_{t_0}^{t_f} x_2'H_{22}^A u_2 dt \tag{3.17}$$

在附录B中的引理B.1里，我们证明了 $V[0, t_0, u(\cdot)]$的非负性条件(1.3)意味着在区间 $[t_0, t_f)$ 上 $H_{22}^A \equiv 0$. 当 H_{22}^A 连续时，这一等式可以扩展到整个闭区间 $[t_0, t_f]$.

引进以下符号

$$\hat{x} = x_1 \quad \hat{u} = [\hat{u}_1' \ \hat{u}_2'] = [x_2' \ u_1']'$$

$$\hat{F} = F_{11} \quad \hat{G} = [F_{12}G_{11}], \ \hat{H} = [\hat{H}_1\hat{H}_2] \tag{3.18}$$

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 & \hat{R}_2 \\ \hat{R}_2' & I \end{bmatrix}$$

那么，(3.17)式就可以写成

$$V[u(\cdot)] = [\hat{x}'S_{11}\hat{x} + 2\hat{x}'(S_{12} + H_{12})\hat{u}_1 + \hat{u}_1'(S_{22} + H_{22})\hat{u}_1]_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\{\hat{x}'\hat{Q}\hat{x} + 2\hat{x}'\hat{H}\hat{u} + \hat{u}'\hat{R}\hat{u}\}dt \tag{3.19}$$

而(3.2)式就成为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{F}\hat{x} + \hat{G}\hat{u} \tag{3.20}$$

现在，我们想用一个新问题来代替原来在给定了指标(1.1)和系统(1.2)，以及 $x(t_0) = 0$ 的情况下，寻求(1.3)式成

立的充分且必要条件的问题，此新问题与原问题的结构相同，只是各个量都加上了冒号．重要的一点是应弄清楚我们为什么要这样做．显然，状态变量 $\hat{x}$ 的维数要比 x 的维数低．因此反复地进行简化到标准型（同时也可能降低控制空间的维数），然后再用 Kelley 变换降低状态空间的维数这样的循环，就必然会终止于以下三种可能性之一：控制变量的维数为零，或者状态变量的维数为零，或者是一个非奇异问题．对于这三种情况中的任意一种来说，都能得到(1.3)式成立的必要且充分条件．

现在再回来考察有冒号的代换问题．由于要求它与原问题具有相同的结构，特别要求 $\hat{u}$ 是分段连续的控制，因此由(3.3)式作出的 u_2 在 u_1，也就是 x_2 不连续的地方，可能含有 δ 函数．这样一来，假如要所得到的性能指标是一样的话，原始问题的容许控制函数的集合 U 就应扩展到包括 δ 函数的情形．然而，这并没有什么问题；因为 δ 函数可以当作是连续函数的极限情形，因而，原来的非负性要求(1.3)等价于

$$V[0, t_0, u(\cdot)] \geqslant 0 \quad 对每个 u(\cdot) \in U' \tag{3.21}$$

其中 U' 是容许控制 $u(\cdot)$ 的适当扩展的集合．

从(3.19)式中可以清楚地看到，非负性要求(3.21)式意味着(3.19)式的终端项对于每个 $\hat{x}$ 都有不依赖于 $\hat{u}_1$ 的下界．其充分必要条件是

$$\langle \text{i} \rangle \ S_{22} + H_{22}(t_f) \geqslant 0 \tag{3.22}$$

$$\langle \text{ii} \rangle \ N[S_{22} + H_{22}(t_f)] \subseteq N[S_{12} + H_{12}(t_f)] \tag{3.23}$$

其中 N 表示零空间．利用配平方的论证方法，(3.19)式中的终端项可以写成

$$\begin{aligned}&[\hat{u}_1 + (S_{22} + H_{22})^{\#}(S_{12} + H_{12})'\hat{x}]'(S_{22} + H_{22})[\hat{u}_1 \\ &\quad + (S_{22} + H_{22})^{\#}(S_{12} + H_{12})'\hat{x}]_{t=t_f} \\ &\quad + \hat{x}'[S_{11} - (S_{12} + H_{12})(S_{22} + H_{22})^{\#}(S_{12}\end{aligned}$$

$$+ H_{12})']\hat{x}|_{t=t_f} \quad (3.24)$$

这里#号表示伪逆．利用以下符号

$$\hat{S} = S_{11} - [S_{12} + H_{12}(t_f)][S_{22} + H_{22}(t_f)]^{\#}[S_{12} + H_{12}(t_f)]'$$

$$\hat{K} = -[S_{22} + H_{22}(t_f)]^{\#}[S_{12} + H_{12}(t_f)]'$$

(3.19)式就变成

$$V[0, t_0, u(\cdot)] = [\hat{u}_1 - \hat{K}\hat{x}]'(S_{22} + H_{22})[\hat{u}_1 - \hat{K}\hat{x}]|_{t=t_f} + \hat{x}'\hat{S}\hat{x}|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\{\hat{x}'\hat{Q}\hat{x} + 2\hat{x}'\hat{H}\hat{u} + \hat{u}'\hat{R}\hat{u}\}dt \quad (3.25)$$

由于 $\hat{u}$ 是分段连续的，又因 $\hat{u}_1(t_f)$ 出现在(3.25)式的终端项之中，它不会影响(3.25)式的积分值，所以(3.25)式的极小化问题可以分为两个问题分别地进行，即具有 $\hat{u}_1(t_f)$的终端项的极小化问题和剩下的积分加终端项的极小化问题．现在，我们给出以下定理来总结至此所得到的结果．

定理 III.3.1 假设 F, G, Q 和 R 是连续的，H 是连续可微的，$x(t_0) = 0$，且问题 (1.1) 式至 (1.3) 式具有标准型．其次，量 $\hat{x}, \hat{u}, \hat{F}, \hat{G}, \hat{Q}, \hat{H}, \hat{R}, \hat{S}$ 如以前所定义，令

$$V[0, t_0, \hat{u}(\cdot)] = \hat{x}'(t_f)\hat{S}\hat{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}\{\hat{x}'\hat{Q}\hat{x} + 2\hat{x}'\hat{H}\hat{u} + \hat{u}'\hat{R}\hat{u}\}dt \quad (3.26)$$

则在 (1.2) 式的条件下，$x(t_0) = 0$，对于每个 $u \in U$ 有 $V[0, t_0, u(\cdot)] \geqslant 0$，当且仅当

(a) 在 (3.20) 式的条件下，且 $\hat{x}(t_0) = 0$ 时，对于每个 $\hat{u} \in U$，有 $\hat{V}[0, t_0, \hat{u}(\cdot)] \geqslant 0$ 成立．

(b) 对于每个 $t \in [t_0, t_f]$，$H_{22}(t)$ 是对称的．

(c) $S_{22} + H_{22}(t_f) \geqslant 0$

(d) $N[S_{22} + H_{22}(t_f)] \subseteq N[S_{12} + H_{12}(t_f)]$

评注 3.1 1．从上一节中可知，为了把给定的问题化为标准型，就需要对由系数矩阵 F, G 等所组成的矩阵的秩，及其

可微性作某些假定.

2. 这个定理不依赖于任何诸如 (II.3.5) 式那样的可控性假定. 但是，像第二节中那样由非标准型化为标准型时，(II.3.5) 式能保持可控性，从而排除 G 和 H 在标准型中恒等于零的可能性.

3. 在满足 (3.20) 式，且 $\hat{x}(t_0)=0$ 的条件下，对于每个 $\hat{u}\in U$，$V[0, t_0, u(\cdot)]\geqslant 0$ 的必要条件是在 $[t_0, t_f]$ 上 $\hat{R}(t)\geqslant 0$，即经典的 Legendre-Clebsch 条件. 对于原始的问题(没有冒号的)来说，它就变为相应于 (1.5) 的广义 Legendre-Clebsch 条件.

定理 3.1 告诉我们，原来的奇异问题 (1.3) 等价于一个同样形式但可能是非奇异的问题，它具有较低维的状态变量(定理 3.1 的条件 (a))，并带有附加的条件(定理 3.1 的条件(b)，(c)和(d)). 若在区间 $[t_0, t_f]$ 上 $\hat{R}$ 是奇异的，而且有关可微性和秩的假定都成立，那么重复进行化为标准型的变换(可能同时消除某些控制)，以及应用定理 3.1 的过程就可能得到更低维的问题和更多的附加条件. 由于每次应用定理 3.1，状态变量的维数都在降低，因此这个过程必然会终止于几种情形，或者状态变量的维数减少至零，或者问题变成非奇异的，或者在标准型中 G 和 H 变为零. 但是，如可控性条件 (II.3.5) 成立，第三种可能性就不会发生 (见评注 3.1.2).

对于状态变量的维数减少至零的情形，其充分必要条件是显然的；对于得到的是非奇异问题的情况，其充分必要条件可以由经典的 Jacobi 共轭点条件以在区间 $(t_0, t_f]$ 上 Ricati 方程没有逃逸时间的形式给出(见推论 II.3.2). 最后，对于标准型中 G 和 H 为零的情形，其必要充分条件是在 $[t_0, t_f]$ 上 $R(t)$ 为非负的.

在第四节中，定理3.1推广到没有端点约束的一般线性二

次控制问题. 在那里还讨论了最优控制和相应的最优指标的计算问题。

3.4 最优控制和最优性能指标的计算

在本节中,我们将要研究一般的线性二次控制问题,它可以表述为:

在满足(1.2),且初始值 $x(t_0)=x_0$ 不一定为零的条件下,寻求(1.1)具有不依赖于 $u \in U$ 的下界的充分必要条件. 而且当下界存在时,给出极小化(最优)的控制以及相应的极小(最优)指标. (4.1)

这里,我们用推广了的上一节的结果来解决这个问题. 在第五节中,我们还要用前一章的定理 II.3.3 和 Anderson-Moylan 算法来导出最优控制和最优指标.

就像第二节中那样,假设(1.1)和(1.2)是标准型,并且关于各阶导数的假定成立,而状态变量和性能指标的变换由方程 (3.10)—(3.12) 所决定. 由于 $x(t_0)=x_0$ 是任意确定的,在 $V[x_0, t_0, u(\cdot)]$ 的计算公式(3.17)里就应附加上固定的项(此项以前是零)

$$-2x_1'(t_0)H_{12}(t_0)x_2(t_0) - x_2'(t_0)H_{22}^{t}(t_s)x_2(t_0) \qquad (4.2)$$

若在(1.2)式的条件下,(1.1)式的下确界对于所有的 $x(t_0)$ 都是有限的,那么,就意味着 $V^*[0, t_0]=0$, 以及对于所有的 $u(\cdot)$, $V[0, t_0, u(\cdot)] \geq 0$. 就如上节中所论述的,可以得到 $H_{22}[t]$ 在 $[t_0, t_f]$ 上是对称的.

像前一节那样继续进行探讨, 可以得到定理 3.1 的以下推广.

定理 III.4.1 用定理 3.1 的同样的符号和假定, 但允许

$x(t_0)$ 是自由的(这里再次说明,不要求可控性),我们就有

在(1.2)的条件下,对于每个确定的 $x(t_0)$, $V[x_0, t_0, u(\cdot)]$ 有不依赖于 $u \in U$ 的下界,当且仅当

(a) 在 (3.20) 的条件下,对于每个固定的 $\hat{x}_0$, $\hat{V}[\hat{x}_0, t_0, \hat{u}(\cdot)]$ 有不依赖于 $\hat{u} \in U$ 的下界.

(b) 对于每个 $t \in [t_0, t_f]$, $H_{22}(t)$ 是对称的.

(c) $S_{22} + H_{22}(t_f) \geqslant 0$.

(d) $N[S_{22} + H_{22}(t_f)] \subseteq N[S_{12} + H_{12}(t_f)]$.

再次把第三节的讨论推广过来,我们进行这样一系列的变换,结合把系数矩阵变成标准型来应用定理 4.1,直到我们或者得到一个状态变量的维数为零的问题,或者得到一个非奇异问题,或者 G 和 H 为零为止. 对于前两种可能性,(4.1)的充分必要条件是已知的. 对于可以利用可控性条件 (II.3.5) 而加以排除的后一种可能性, 充分必要条件是在 $[t_0, t_f]$ 上有 $R(t) \geqslant 0$. 于是其极小值是

$$x'(t_0)\{\Phi'(t_f, t_0)S\Phi(t_f,t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi'(\tau, t_0)Q(\tau)\Phi(\tau,t_0)d\tau\}x(t_0)$$

现在,为了计算极小化控制和相应的极小指标,我们从非奇异问题,状态变量的维数为零,或者输入的维数为零的问题反回来研究每个阶段上的极小化. 为了说明问题,首先假定在一次变换之后,问题变为非奇异的,也就是在 $[t_0, t_f]$ 上, $\hat{R}(t) > 0$. 于是, $V^*[\hat{x}_0, t_0]$ 是有限的充分必要条件是 Riccati 方程

$$\begin{aligned} -\dot{\hat{P}} &= \hat{P}\hat{F} + \hat{F}'\hat{P} + \hat{Q} - (\hat{P}\hat{G} + \hat{H})\hat{R}^{-1}(\hat{P}\hat{G} + \hat{H})' \\ \hat{P}(t_f) &= \hat{S} \end{aligned} \tag{4.3}$$

在区间 $[t_0, t_f]$ 上没有逃逸时间,其中 $\hat{P}$ 是具有适当维数的对称方阵. 从典型的线性调节器理论中可以知道,在满足

(3.19) 式，且 $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ 不一定为零的条件下，对指标为 $\hat{V}[\hat{x}_1, t, u(\cdot)]$ 的最优控制是

$$\hat{u}^*(t) = \hat{L}(t)\hat{x}(t) \quad \text{其中 } t \in [t_0, t_f] \tag{4.4}$$

其中 $\hat{L} = -\hat{R}^{-1}(\hat{G}'\hat{P} + \hat{H}')$，相应地极小指标是

$$\hat{V}[\hat{x}_0, t_0, \hat{u}^*(\cdot)] = \hat{x}'(t_0)\hat{P}(t_0)\hat{x}(t_0) \tag{4.5}$$

但是我们还需要对出现在 $V[x_0, t_0, u(\cdot)]$ 的表达式中，但不出现在 $\hat{V}[\hat{x}_0, t_0, \hat{u}(\cdot)]$ 的表达式中的终端项单独进行极小化；当 $x_0 = 0$ 时，这个终端项已在(3.25)式中给出，但显然它不依赖于 x_0 值而取同样的形式．分别进行极小化，就能给出在 $t = t_f$ 时控制 $\hat{u}_1$ 的最优值

$$\hat{u}_1^*(t_f) = \hat{K}\hat{x}(t_f) \tag{4.6}$$

并相应地给出终端项为零时的极小指标（参考（3.25））．而 $\hat{u}_2(t_f)$ 的最优值看来是不确定的，最方便的办法是由（4.4）来决定．现在，考虑在 t_0 点的最优控制，可以看到，$\hat{u}_1^*(t_0)$ 应取为 $x_2(t_0)$．同样，$\hat{u}_2^*(t_0)$ 也是任意的，最方便的办法仍是由(4.4)式来决定．

现在，把对带冒号的那些量分别进行最优化所得到的最优控制和最优指标组合起来，就得到问题(4.1)的最优控制和最优指标．根据(4.5)式和(4.2)式，可以写出 $V[x_0, t_0, u(\cdot)]$ 的最优值为

$$[x_1'(t_0)\ x_2'(t_0)]\begin{bmatrix} \hat{P}(t_0) & -H_{12}(t_0) \\ -H_{12}'(t_0) & -H_{22}(t_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

这时由(4.4)式和(4.6)式所构成的最优控制是

$$\begin{aligned} &\hat{u}^*(t) = \hat{L}(t)\hat{x}(t) \quad \text{其中 } t \in (t_0, t_f] \\ &\hat{u}_1^*(t_0) = x_2(t_0) \\ &\hat{u}_1^*(t_f) = \hat{K}\hat{x}(t_f) \\ &\hat{u}_2^*(t_0) \text{ 和 } u_2^*(t_f) \text{ 如上所述.} \end{aligned} \tag{4.8}$$

然而，问题(4.1)的最优控制的计算是利用（3.3）式，由

x_1^*，x_2^* 和 u_1^* 来决定 u_2^* 而完成的（那三个量就是具有冒号的 $\hat{x}^*$，$\hat{u}_1^*$ 和 $\hat{u}_2^*$）；控制 u^* 的 u_1^* 部分已经被 $\hat{u}_2^*$ 所确定. 在区间 $[t_0, t_f]$ 的初始时刻和终端时刻处，最优控制 u^* 可能出现 δ 函数的原因现在就清楚了，因为根据(4.8)式，在 $[t_0, t_f]$ 的端点处，最优控制 $\hat{u}^*$ 可能产生突跳. 为了防止在区间 (t_0, t_f) 内出现 δ 函数的可能性，我们要求由 $\hat{P}$，$\hat{R}$ 和 $\hat{G}$ 所构成的 $\hat{L}(t)$ 在整个区间上是连续可微的. 最后，$\hat{u}_2^*(t_0)$ 和 $\hat{u}_2^*(t_f)$ 的任意性将导致最优控制的选择不是唯一的，也就是在 t_0 和 t_f 点处 δ 函数的形式是不唯一的.

以上讨论了经过变换后的问题是非奇异的情形时所用的方法. 现在，假定变换后的问题中状态变量的维数为零. 于是 $\hat{V}[\hat{x}_0, t_0, u(\cdot)]$ 正好就是 $\int_{t_0}^{t_f} \hat{u}'\hat{R}\hat{u}dt$；它有下界的充分必要条件是在 $[t_0, t_f]$ 上 $\hat{R} \geqslant 0$. 对于 $\hat{R} > 0$ 的情形，最优控制是 $\hat{u}^*(t) \equiv 0$（显然，它是唯一的）. 然而，对于在 $[t_0, t_f]$ 上秩为 S 的 $\hat{R}$，显然把它变到标准型的变换，仅使 $\hat{u}$ 的前 S 个分量为零，而 $\hat{u}$ 的其余分量是任意的. 按经过变换变为非奇异的情形所用过的办法，可以算出最优控制和最优指标.

最后，对于标准型中 G 和 H 为零的情形，其极小值前面已经讲过了. 相应的最优控制就像前面几段中所介绍的那样计算.

上面所讨论过的三种情形中的任意一种都可以作为计算最优控制和指标的问题的反推过程中的第一步，这里可能需要经过不止一次的变换才能把问题变成非奇异的，或状态变量的维数为零，或输入的维数为零的情形. 从而为了完成这一讨论，我们须要简要地看看如定理 4.1 所给出的那样由状态变量维数较低(但不是零)的奇异问题的最优量来计算奇异问题的最优控制和最优指标的过程. 假设低维的问题的最优

控制是已知的，而且在 (t_0, t_f) 上它是连续可微的，在端点上可能有 δ 函数和 δ 函数的导数．此外它还可能由于所讨论的极小化程序而在端点处出现突跳．注意 (3.3) 式，可以看到，高维问题的最优控制将包含低维问题最优控制中的突跳和 δ 函数的导数．最优指标的计算是按 (4.7) 的途径进行的，其中定义二次性能指标的矩阵分块是由端点条件所唯一确定的．

最优控制不一定唯一，虽然它的某些分量可以是唯一的，例如由非奇异问题所给出的控制及其端点的最优值．造成不唯一的原因是多种多样的，主要是：在把问题变成标准型时，控制变量维数的减少，终止于零维状态变量的奇异问题，以及不出现在指标中的某些端点控制．还要注意，就如最优指标 (4.7) 中所表明的，性能指标的一部分是由 $H(t_0)$ 的各部分所唯一决定的，而其余部分由 Riccati 方程 (4.3) 所唯一决定．下一节将比前面更自然地导出这些结果．

最后，在有关奇异控制问题的绝大多数讨论中，都提出奇异带的定义问题，它是当控制为最优时，状态向量所在的子空间．在我们进行的推导中（与文献[19]相反），奇异带是与由最终的问题的状态变量来描述的原来状态空间的子空间紧密相连的，不论这个最终的问题是非零维状态变量的非奇异问题，或是零维状态变量问题．在前一种情形里，按描述原来状态空间的坐标而定义的奇异带是非常复杂的，因为必须反着次序使用达到最终的问题所用过的各种变换．而后一种情形是简单的；奇异带正好就是原来状态空间的唯一的零维子空间，即原点．要阐明在最优控制的端点处产生 δ 函数及其导数也是不难的．它们容许在初始时间 t_0 把初始状态瞬时地变到奇异带上去，并在终端时间 t_f 跳离奇异带．

3.5 利用 Riemann-Stieltjes 不等式求解

在第四节介绍的线性二次控制问题的求解方法中，状态空间维数的降低和最优控制的计算都是用直接的方式来进行的，而用计算最优指标完成这一问题的解．这里，我们用 Anderson-Moylan 算法结合定理 II.3.3 来给出第四节的结果的另一种推导．在这方法中为了计算矩阵的积分不等式的矩阵解，对一个与 P 有关的矩阵度量作了处理．与第四节中的方法不同，这里状态的变换和最优控制不是主要算法的一部分．

回顾定理 II.3.3，它把线性二次问题 (4.1) 和具有 Riemann-Stieltjes 不等式的充分必要条件连系在一起．通常可能有许多满足 Riemann-Stieltjes 不等式的矩阵 $P(\cdot)$，但是，如我们在定理 II.5.1 中已证明的，存在一个最大的矩阵解，它确定了对应控制问题的性能指标．

为了方便起见，我们重新把 Riemann-Stieltjes 不等式写在这里，即对于所有连续的 $v(\cdot)$，所有分段连续的 $u(\cdot)$ 以及对于所有的 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$，有

$$\int_{t_1}^{t_2} [v'u'] \begin{bmatrix} dP + (PF + F'P + Q)dt & (PG + H)dt \\ (PG + H)'dt & Rdt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.1}$$

此外，还必须满足端点条件

$$P(t_f) \leqslant S \tag{5.2}$$

和前面一样，假设 G 和 R 是标准型，矩阵和向量仍具有对应的分块形式．代入(5.1)式中，定义 $W' = [v_1' \ v_2' \ u_1']$，可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2} W'dYW + 2\int_{t_1}^{t_2} v_1'(P_{12} + H_{12})u_2dt$$

$$+ 2\int_{t_1}^{t_2} v_2'(P_{22} + H_{22})u_2dt \geqslant 0 \qquad (5.3)$$

这里 dY 的定义是明显的，由此可以断定

$$P_{12}(t) + H_{12}(t) = 0 \quad 在 (t_0, t_f) 上 \qquad (5.4)$$

$$P_{22}(t) + H_{22}(t) = 0 \quad 在 (t_0, t_f) 上 \qquad (5.5)$$

为了证明 (5.5) 式成立，假设存在一个区间 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$，以及 $v_2(\cdot)$ 和 $u_2(\cdot)$，使得

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2'(P_{22} + H_{22})u_2dt \qquad (5.6)$$

不是零. 那么，在 $[t_1, t_2]$ 上选取 $v_1(t) \equiv 0$，因而不等式(5.3)的中间项对于所有的 $u_2(\cdot)$ 都是零. 由于(5.3)式的第一项不受 $u_2(\cdot)$ 的影响，因此，很清楚，对于 $u_2(\cdot)$ 的某个适当标度，我们可以得到与等式 (5.3) 相矛盾的情形. 这样一来，对于任意的 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$，以及对于任意连续的 $v_2(\cdot)$ 和任意分段连续的 $u_2(\cdot)$，(5.6) 式都必须是零. 然而，$P_{22}(\cdot)$ 具有有界的变差，所以，除了在区间 $[t_0, t_f]$ 内的可数个点以外，它都是连续的. 根据 $H_{22}(t)$ 的连续性，我们可以断定在区间 (t_0, t_f) 内 $P_{22}(t)$ 的所有连续的点上，(5.5)式都是成立的.

我们还可以用以下方法把 (5.5) 式的正确性推广到整个区间 (t_0, t_f) 上去. 假设 t_2 是 $P(\cdot)$ 的一个间断点. 因为 $P(\cdot)$ 是单调的，所以在 t_2 点有左极限和右极限；如第二章所述（参见引理 II. 3.5），$P(\cdot)$ 的突跳必定是非负的矩阵. 所以，$P_{22}(\cdot)$ 的突跳也一定是非负的，也就是 $\lim\limits_{t\uparrow t_2} P_{22}(t) \leqslant \lim\limits_{t\downarrow t_2} P_{22}(t)$. 但是，这两个极限必须都是 $H_{22}(t)$，因为 $H_{22}(\cdot)$ 是连续的，而且 P_{22} 和 H_{22} 几乎处处相等. 因此，$P_{22}(t_2) = H_{22}(t_2)$，

P_{22} 没有突跳．这就证明了(5.5)式的正确性．同样的办法可以证明(5.4)式也必须成立．

现在，对于任何满足 (5.1) 式的 P，我们已经唯一地找出 P_{12} 和 P_{22} 两个分块，如果有什么不唯一的情形，那只能发生在 P_{11} 块上．而且，P 在 (t_0, t_f) 上是对称的，由 (5.5) 式，这说明 H_{22} 的对称性是最优控制问题可解的必要条件．

我们还可以证明：在 $P(t) = P^*(t)$ 的情况下，(5.4) 式和 (5.5) 式还可以推广到 t_0 点上去，这里 $P^*(t)$ 如前所定义．Riemann-Stieltjes 积分不等式也说明(看引理 II.3.5) 满足不等式的任何 $P(\cdot)$ 的所有突跳必须是非负的，也就是

$$P(t_-) \leqslant P(t) \leqslant P(t_+),$$

因而

$$\begin{bmatrix} P_{11}(t_{0+}) & -H_{12}(t_0) \\ -H'_{12}(t_0) & -H_{22}(t_0) \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} P_{11}(t_0) & P_{12}(t_0) \\ P'_{12}(t_0) & P_{22}(t_0) \end{bmatrix}$$

显然，取 $P_{12}(t_0) = -H_{12}(t_0)$，$P_{22}(t_0) = -H_{22}(t_0)$，并不破坏 Riemann-Stieltjes 积分等式，而且根据 $P^*(\cdot)$，特别是 $P^*(t_0)$ 是最大解的性质，就有

$$P^*_{12}(t_0) = -H_{12}(t_0), \quad P^*_{22}(t_0) = -H_{22}(t_0).$$

对右端点 t_f 的讨论导出

$$S = \begin{bmatrix} P^*_{11}(t_f) & P^*_{12}(t_f) \\ P^{*\prime}_{12}(t_f) & P^*_{22}(t_f) \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} P_{11}(t_f) & P_{12}(t_f) \\ P'_{12}(t_f) & P_{22}(t_f) \end{bmatrix}$$

$$\geqslant \begin{bmatrix} P_{11}(t_{f-}) & P_{12}(t_{f-}) \\ P'_{12}(t_{f-}) & P_{22}(t_{f-}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(t_{f-}) & -H_{12}(t_f) \\ -H'_{12}(t_f) & -H_{22}(t_f) \end{bmatrix}$$

所以 $N[S_{22} + H_{22}(t_f)] \subseteq N[S_{12} + H_{12}(t_f)]$ 且 $S_{22} + H_{22}(t_f) \geqslant 0$．

此外，回到(5.3)式和 dY 的定义，有

$$dY=\begin{bmatrix} dY_{11} & dY_{12} & dY_{13} \\ dY'_{12} & dY_{22} & dY_{23} \\ dY'_{13} & dY'_{23} & I \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

其中

$$\begin{aligned}
dY_{11} &= dP_{11}+(Q_{11}+P_{11}F_{11}+F'_{11}P_{11}+P_{12}F_{21}+F'_{21}P'_{12})dt \\
dY_{12} &= dP_{12}+(Q_{12}+P_{11}F_{12}+P_{12}F_{22}+F'_{11}P_{12}+F'_{21}P_{22})dt \\
dY_{22} &= dP_{22}+(Q_{22}+P_{22}F_{22}+F'_{22}P_{22}+P'_{12}F_{12}+F'_{12}P_{12})dt \\
dY_{13} &= (P_{11}G_{11}+P_{12}G_{21}+H_{11})dt \\
dY_{23} &= (P'_{12}G_{11}+P_{22}G_{21}+H_{21})dt
\end{aligned} \tag{5.8}$$

假设H是可微的，将上述结果与定义(3.18)组合起来，可以得到

$$dY=\begin{bmatrix} d\hat{P}+(\hat{P}\hat{F}+\hat{F}'\hat{P}+\hat{Q})dt & (\hat{P}\hat{G}+\hat{H})dt \\ (\hat{P}\hat{G}+\hat{H})'dt & \hat{R}dt \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

其中 $\hat{P}=P_{11}$.

注意到(5.9)式的 Riemann-Stieltjes 积分和原来(5.1)式的积分形式相同，因此，我们试图得到对应于(5.9)式的极小化问题(它与问题(4.1)形式相同)。但是很清楚，在第三，四节已有的研究基础上，利用变换(3.10)式—(3.12)式，按(3.18)式定义$\hat{x}$和$\hat{u}$，而$\hat{S}$如第三节中所定义，那么，极小化问题正好就是定理 4.1 中部分(a)所描述的.

由以上讨论可以导出：

定理 III.5.1 在和定理 3.1 相同的一些假定下，存在一个在$[t_0, t_f]$上有有界变差的$n\times n$阶对称矩阵$P(t)$，使得对于任意的$[t_1, t_2]\subset[t_0, t_f]$，(5.1)和(5.2)式成立，当且仅当存在一个维数适当的对称矩阵$P(t)$，它在$[t_0, t_f]$上有有界变差，且使得：

(a) $\hat{P}(t_f)\leqslant\hat{S}$. (5.10)

(b) 对于所有连续的$\hat{x}(\cdot)$和所有分段连续的$\hat{u}(\cdot)$

$$\int_{t_1}^{t_2}[\hat{v}' \ \hat{u}']\begin{bmatrix} d\hat{P}+(\hat{P}\hat{F}+\hat{F}'\hat{P}+Q)dt & (\hat{P}\hat{G}+\hat{H})dt \\ (\hat{P}\hat{G}+\hat{H})'dt & \hat{R}dt \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{v}\\ \hat{u}\end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.11}$$

(c) 在 $[t_0, t_f]$ 上 $H_{22}(t)$ 是对称的.

(d) $S_{22}+H_{22}(t_f)\geqslant 0$.

(e) $N[S_{22}+H_{22}(t_f)]\subseteq N[S_{12}+H_{12}(t_f)]$.

和以前几节中的情形一样，可能需要多次应用定理 5.1 和化为标准型的变换，最终得到的或者是零维的 $\hat{P}$，这时，原来的 P 可由一系列如同(5.4)式和 (5.5) 式的那些等式完全且唯一地决定；或者将得到具有某个正维数的 $\hat{P}$，而且其中 $\hat{R}$ 是非奇异的问题，或者在从非标准型变换到标准型时，G 和 H 变为零. 对于第二种情形，就如我们所知道的那样，(5.10)式和(5.11)式有解 $\hat{P}$，当且仅当 Riccati 方程(4.3)在 $[t_0, t_f]$ 上没有逃逸时间. 而且 Riccati 方程的唯一解 $\hat{P}$ 就是(5.10)式和(5.11)式的许多可能解中最大的一个（见定理 II.5.1）. 最后，由 Riccati 方程所算出来的 $\hat{P}$ 可通过标准的二次型与最优指标相连系. 再返回到原来的控制问题，这样得到的 (5.1) 式的解 P 就确定了问题(4.1)关于每个 $x(t_0)$ 的最优指标.

对于第三种情形，当 G 和 H 为零时，我们早已说过 $\hat{P}$ 该是什么样的. 同样，可以返回到原来的控制问题而求出解 P.

3.6 结束语

在这一章中，我们给出了一个计算某些矩阵的算法，这些矩阵的存在性是由某个泛函的非负性来保证的. 它同时间接地提供了一种校核这个泛函非负性的办法. 其次，我们还说明了在线性二次奇异最优控制问题里，怎样应用这种算法去计算最优性能指标和最优控制(后者可能不是唯一的). 这个

算法的几个主要特点是：它的处理向量控制问题的能力；以及它一方面与奇异控制问题的其它一些可能还不完整的研究相连系，另一方面它又与奇异的，时变的协方差因式分解问题相连系；再有就是它对奇异带的说明. 它的缺点则在于要求某些矩阵的秩在所感兴趣的区间上保持为常数，以及某些矩阵具有可微的性质.

还有另外一种解决最优控制问题的方法，我们一直没有提到. 用一个平方装置的标准实现，如果最优控制存在，可以将它的开环形式表示为线性 Fredholm 积分方程的解，在最优控制问题是非奇异的情况下，这方程只是第二类的. 文献[28]中研究了对偶奇异问题的解法（出现于检测理论中），把它修改一下，可用于控制问题.

附　录 III.A

Dolezal 定理

下述之 Dolezal 定理，来自文献[24, 25].

定理 III.A.1　令 $A(\cdot)$ 是 $r\times r$ 阶的矩阵，其元素在 $[a, b]$ 内具有 p 阶的连续导数，且对于所有的 $t\in[a, b]$，$A(t)$ 的秩为 h. 那么，存在一个 $r\times r$ 阶的矩阵 $M(\cdot)$，其元素在 $[a, b]$ 内具有 p 阶连续导数，且对于所有的 $t\in[a, b]$，$M(t)$是非奇异的并且有$A(t)M(t)=[B(t)\,\vdots\,0]$. 这里$B(\cdot)$是 $r\times h$ 阶的矩阵，$B(t)$ 的秩为 h. 若对于所有的 t，$A(t)=A'(t)$，而M 如上构造，显然，$M'[B\,\vdots\,0]$ 必定是对称的，由此可以得出

$$M'(t)A(t)M(t)=\left[\begin{array}{c|c}C(t) & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]$$

其中 $C(t)$ 是 $h \times h$ 维的，而且对于所有的 t 是非奇异的。

若此处 $A(t)$ 还是非负定的，那么，$C(t)$ 就是正定的。这时存在一个三角阵 $D(t)$，它的元素可以用 $C(t)$ 的元素来表示，而且还保持了可微的性质，使得 $C(t) = D'(t)D(t)$（参考文献[26]）。那么，让 $N(t) = M(t)D^{-1}(t)$，它的元素具有连续的 p 阶导数，且对于所有的 $t \in [a, b]$ 它是非奇异的，就有

$$N'(t)A(t)N(t) = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

附　录　III. B

对称条件

这里所证明的结果是对偶协方差因式分解问题中类似结果的推广[5]。

这里所引用的符号与本章主要部分所用的那些符号没有什么关系，令

$$\begin{aligned} V[\xi, u] = {} & [2z_1'S_2z_2 + z_2'S_3z_2]_{t=t_f} \\ & + \int_{t_0}^{t_f} z_2'Au\,dt + \int_{t_0}^{t_f} \{z_1'Qz_1 + 2z_1'Hz_2 \\ & + z_2'Rz_2\}dt \end{aligned} \tag{B.1}$$

其中 z_1，z_2 和 u 有以下关系

$$\dot{z}_1 = F_{11}z_1 + F_{12}z_2 \quad z_1(t_0) = \xi_1 \tag{B.2}$$

$$\dot{z}_2 = F_{21}z_1 + F_{22}z_2 \quad z_2(t_0) = \xi_2 \tag{B.3}$$

假设 Q，H，R，F 和 A 是 $[t_0, t_f]$ 上的连续矩阵，Q 和 R 是对称的，A 是反对称的，而 S_2 和 S_3 是常数矩阵。所有这些量的维数在保证相容的条件下可以是任意的。

引理 B.III.1　若在 $[t_0, t_f]$ 上 $A(t) \neq 0$，就必定存在一个有界的分段连续的控制 $\bar{u}(\cdot)$，使得 $V[0, \bar{u}] < 0$。

证明 因为A是反对称的，所以该引理不适用于u是标量的情形. 同样,若在$[t_0, t_f]$上$A(t)\equiv 0$, 那么,根据$A(t)$的连续性,就有$A(t_f)\equiv 0$.

考虑$\sigma\in[t_0, t_f)$, K和j是不同的指标,使得$a_{kj}(\sigma)\neq 0$,其中$a_{kj}(\sigma)$是$A(\sigma)$的第k行、第j列的元素. 不失一般性,假设$a_{kj}(\sigma)>0$.

令与(B.2),(B.3)式有关的变换矩阵是$\phi(t,\tau)$. 那么,对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在$\delta(\varepsilon)>0$,使得对于所有的满足$\sigma\leqslant t, \tau\leqslant\sigma+\delta$的$t$和$\tau$,都有$\|\phi(t,\tau)-I\|\leqslant\varepsilon$, 这里$\|\phi\|$是$\phi$的元素的范数的最大值.

令$\bar{\delta}$是任意的正数,满足$\bar{\delta}\leqslant\delta(\varepsilon)$,并且选取控制$\bar{u}(\cdot)$,使得它除了

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_k(\tau)&=-\omega\cos\omega(\tau-\sigma)\\ \bar{u}_j(\tau)&=-\omega\sin\omega(\tau-\sigma)\end{aligned}\right\}\quad \text{对于 } \tau\in[\sigma,\sigma+\bar{\delta}] \tag{B.4}$$

以外恒等于零. 利用(B.2),(B.3),(B,4)式,并取$\xi=0$,就有

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t)-\int_{t_0}^{t}\bar{u}(\tau)d\tau \end{bmatrix}=\int_{t_0}^{t}\{\phi(t,\tau)-I\}\begin{bmatrix}0\\ \bar{u}(\tau)\end{bmatrix}d\tau \tag{B.5}$$

从(B.5)式中我们可以断言在区间$[\sigma,\sigma+\bar{\delta}]$上有

$$\begin{aligned}&|z_{2k}(t)+\sin\omega(t-\sigma)|\leqslant 2\varepsilon np\\ &|z_{2j}(t)+1-\cos\omega(t-\sigma)|\leqslant 2\varepsilon np\\ &|z_{2l}(t)|\leqslant 2\varepsilon np \quad l\neq k, j\\ &|z_{1r}(t)|\leqslant 2\varepsilon np \quad 1\leqslant r\leqslant z_1\text{的维数}\end{aligned} \tag{B.6}$$

其中

$$p=\dim z_1+\dim z_2$$

$$n=\text{大于或等于 }\frac{2\omega\bar{\delta}}{\pi}\text{ 的最小整数。}$$

现在，考虑在区间$[\sigma+\bar{\delta}, t_f]$上的$z_1$和$z_2$。令$z'=[z_1' \ z_2']$，$K_1=\max_{t,\tau\in[t_0,t_f]}\|\phi(t,\tau)\|$；由于$\phi(t,\tau)$的连续性，这个量是有确定意义的．若选取$\omega$使得

$$\omega\bar{\delta}=2\pi \tag{B.7}$$

那么，从(B.6)式可以看出：对于向量$z(\sigma+\bar{\delta})$的每个分量都有$|z_i(\sigma+\bar{\delta})|\leqslant 8\varepsilon p$．最后，因为在$[\sigma+\bar{\delta}, t_f]$上，$z(t)=\phi(t,\sigma+\bar{\delta})z(\sigma+\bar{\delta})$，就有在$[\sigma+\bar{\delta}, t_f]$上

$$|z_i(t)|\leqslant 8\varepsilon pK_1 \tag{B.8}$$

正如我们从(B.5)式推出不等式(B.6)一样，有

$$\left|\int_{t_0}^{t_f} z_2'A\bar{u}dt + z_{kj}(\sigma)[\omega\bar{\delta}-\sin\omega\bar{\delta}]\right|\leqslant K_2\varepsilon\omega\bar{\delta} \tag{B.9}$$

这里K_2是常数．应该注意(B.9)式中的界限．特别是应该选择$\bar{\delta}$，使对于$\sigma\leqslant t\leqslant\sigma+\bar{\delta}$都有$|a_{kj}(t)-a_{kj}(\sigma)|\leqslant\varepsilon$；由于$A$是连续的，而$\bar{\delta}$是任意的，所以这是不成问题的．令$\omega\bar{\delta}=2\pi$，(B.9)式就变成

$$\left|\int_{t_0}^{t_f} z_2'A\bar{u}dt + 2\pi a_{kj}(\sigma)\right|\leqslant 2\pi\varepsilon K_2 \tag{B.10}$$

根据(B.9)，(B.1)式右边的第一项有上界$K_3\varepsilon^2$，其中K_3是某个常数；根据(B.10)，(B.1)式右边的第一个积分有上界$-2\pi a_{kj}(\sigma)+2\pi\varepsilon K_2$；以及根据(B.8)，(B.6)，(B.1)式的最后一个积分有上界$K_4\bar{\delta}+K_5\varepsilon^2$，其中$K_4$和$K_5$是常数，组合到一起，就有

$$V[0,\bar{u}]\leqslant K_3\varepsilon^2-2\pi a_{kj}(\sigma)+2\pi\varepsilon K_2 + K_4\bar{\delta}+K_5\varepsilon^2 \tag{B.11}$$

因为$a_{kj}(\sigma)>0$，而$\bar{\delta}$和ε是任意小的量，所以，$V[0,\bar{u}]$必定是负的．引理得证．

参　考　文　献

[1] A. E. Bryson and Y. C. Ho., Applied Optimal Control, Ginn and

Co., Mass., 1969.

[2] J. C. Willems, "Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-16, December 1971, pp. 621—634.

[3] J. B. Moore and B. D. O. Anderson, "Extensions of quadratic minimization theory: I. Finite time results", *Int. J. Control,* Vol. 7, 1968, pp. 465—472.

[4] B. D. O. Anderson, J. B. Moore and S. G. Loo, "Spectral factorization of time-varying covariance functions", *IEEE Trans. Information Theory,* Vol. IT-15, 1969, pp. 550—557.

[5] B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Spectral factorization of a finite-dimensional nonstationary matrix covariance", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-19, 1974, pp. 680—692.

[6] N. Krasner, "Semi-separable kernels in linear estimation and control", *Report No.* 7001—7, Information Systems Laboratory, Stanford, Calif., May 1974.

[7] B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Synthesis of linear time-varying passive networks', *IEEE Trans. Circuits and Systems,* Vol. CAS-21, 1974, pp. 678—687.

[8] D. H. Jacobson, "Totally singular quadratic minimization problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-16, 1971, pp. 651—658.

[9] D. J. Bell, "Singular problems in optimal control - a survey", *Control Systems Centre Report,* No. 249, University of Manchester Institute of Science and Technology, England, 1974.

[10] D. J. Bell and D. H. Jacobson, Singular Optimal Control Problems, Academic Press, New York, 1975.

[11] H. M. Robbins, "A generalized Legendre-Clebsch condition for the singular cases of optimal control", *IBM J. Res. Develop.,* Vol. 3, 1967, pp. 372.

[12] H. J. Kelley, "A second variation test for singular extremals", *AIAA J.,* Vol. 2, 1964, pp. 1380—1382.

[13] H. J. Kelley, R. E. Kopp and H. G. Moyer, "Singular extremals", in Topics in Optimization, G. Leitmann, Ed., Academic Press, New York 1967.

[14] H. J. Kelley, "A transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems", *SIAM J. Control,* Vol. 2, 1964, pp. 234—240.

[15] B. S. Goh, "Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables", *SIAM J. Control,* Vol. 4, 1966, pp. 716—731.

[16] B. S. Goh, "The second variation for the singular Bolza problem", *SIAM J. Control,* Vol. 4, 1966, pp. 309—325.

[17] J. B. Moore, "The singular solutions to a singular quadratic minimization problem", *Int. J. Control,* Vol. 20, 1974, pp. 383—393.
[18] J. L. Speyer and D. H. Jacobson, "Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems; a transformation approach", *J. Math. Anal. Appl.,* Vol. 33, 1971, pp. 163—187.
[19] P. J. Moylan, "Preliminary simplifications in state-space impedance synthesis", *IEEE Trans. Circuits and Systems,* Vol. CAS-21 1974, pp. 203—206.
[20] R. E. O'Malley, Jr., and A. Jameson, "Singular perturbations and singular arcs - part I", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-20, 1975, pp. 218—226.
[21] Y. C. Ho, "Linear stochastic singular control problems", *J. Opt. Theory and Appl.,* Vol. 9, 1972, pp. 24—31.
[22] D. J. Clements, B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Matrix inequality solution to linear-quadratic singular control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-22, 1977, pp. 55—57.
[23] D. J. Clements and B. D. O. Anderson, "Transformational solution of singular linearquadratic control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-22, 1977, pp. 57—60.
[24] V. Dolezal, "The existence of a continuous basis of a certain linear subspace of E which depends on a parameter", *Cas. Pro. Pest. Mat.,* Vol. 89, 1964, pp. 466—468.
[25] L. Weiss and P. L. Falb, "Dolezal's theorem, linear algebra with continuously parameterized elements and time-varying systems", *Math. Syst. Theory,* Vol. 3, 1969, pp. 67—75.
[26] F. R. Gantmaker, Theory of Matrices, Chelsea Pub. Co., New York, 1959.
[27] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics - Vol. II, Interscience Publishers Inc., New York, 1962.
[28] M. G. Wood, J. B. Moore and B. D. O. Anderson, "Study of an integral equation arising in detection theory", *IEEE Trans. Information Theory,* Vol. IT-17, 1971, pp. 677—686.

第四章　离散时间的线性二次奇异控制问题和常值方向

4.1　引　　言

对于连续时间的情形，如果在指标的被积函数中控制的加权矩阵在所考虑的时间间隔内的任意一个时刻是奇异的，那么，就把该线性二次控制问题称作是奇异的．在这种情况下，与该问题相联系的 Riccati 方程可能失去意义，这时就要用其他的方法来求解这样的问题．

在第三章里，已经证明，一个奇异控制问题(在满足某种结构上的以及可微性的假定条件时）可以通过解另外一个具有同样线性二次性质的(仍可能是奇异的)控制问题的方法来求解，不过它的状态空间和（或）控制空间的维数较低．这样的简化过程可以持续地进行下去，直至得到以下可能的三种最终问题之一为止：非奇异问题，或状态变量维数为零的问题，或控制变量维数为零的问题，而它们都不难直接求解．原来所给定的控制问题的解可以通过最终问题的解以及有关简化过程的知识简单地构造出来．

此外，在实现任何状态变量维数的降低过程中，显然，最优指标中一部分以一种明确的方式依赖于该问题的系数矩阵(除了终端加权矩阵以外)．

相反，正如大家所知道的，对于任何离散时间的线性二次最优控制问题来说，无论指标中的任何矩阵是否是奇异的，相

应的 Riccati 方程都有明确的意义而且不难直接求解以给出最优控制问题的解. 这样一来，奇异性概念对于离散时间的问题显然就没有什么意义了.

如上所述，对于连续时间的情形，奇异性的一种可能后果(虽然不是必然的)是仅仅根据系数矩阵的知识来找出确定性能指标的矩阵分块. 这种思想曾在文献 [1,2] 中对于离散时间的线性二次控制问题和有关的 Riccati 方程研究过. 那里引进了常值方向的概念，它是这样的一个方向，在这个方向上 Riccati 方程的解首先是常值的 (除了有限的转移周期——transient period)，其次它不依赖于终端加权矩阵. 在文献[1]中，对于具较窄的一类系数矩阵的(这种限制的性质将在第三节中讲述)多输入常系数的情形，其研究方法是鉴别出所有各阶的常值方向，然后由排除最后一段过渡过程而降低 Riccati 方程的动态阶数. 在文献[1]中，还引进了这样一个思想，即在某个区间上状态将最优地被取为零作为刻划常值方向性质的一个方法. 这个思想在这里也表明是有用的.

与文献[1]有关的研究工作在文献 [3] 中也有论述，在那里研究了控制问题的对偶问题，也就是协方差因式分解问题. 作者们只考虑了协方差是标量的情形，在控制问题中这相当于假定输入是标量的情形. 文献 [3] 中还研究了非平稳的协方差，处理了时变的情形，这里推广了常值方向的思想，并称之为退化方向.

这章的主要成果有以下两个方面: 首先，我们详细地研究了表征任何一个离散时间的线性二次控制问题的所有常值方向的问题. 它是文献[1]中相应的结果的推广，尽管我们采用的方法稍有区别. 其次，我们得到了类似于一般的连续时间线性二次奇异控制问题所具有的那些结果. 特别是，利用系数矩阵构造出一个矩阵，它起着连续时间情形里控制的加

权矩阵的作用. 也就是这个矩阵的奇异性使原来给定的问题可以通过另外一个控制问题的求解而得到解决，且它的状态变量的维数和(或)控制变量的维数较低. 此外，可以确定最终归结为三种控制问题之一的简化过程. 这些最终问题：非奇异问题，状态变量维数为零的问题，控制变量维数为零的问题可以很容易地求解；因此，沿简化过程往回推，就能得到原给定问题的解.

本章的梗概如下所述. 第二节重述了一般离散时间的控制问题. 在第三节里，我们根据 j 步之后，对于某个终端加权矩阵而言，其向量可最优地取作零* 来完全刻画 j-常值方向，而且它是某个矩阵的值域中的向量. 第四节考虑降低控制空间维数的问题，而第五节考虑 1-常值方向存在时降低状态空间维数的问题. 在第六节中，综合以前几节的结果，导出求解任何离散时间的奇异控制问题的算法，这里利用常值方向的存在而简化了计算. 第七节给出简要的结论，包括与 Silverman 结构算法[4]，以及最近发展的，由 Kailath 和他的同事们所提出的关于 Riccati 方程的“快速”解法的关系[5,6].

本章大部分结果发表在文献[7]中.

4.2 离散时间的线性二次控制问题

在这一节里，我们回顾了有关离散时间定常线性二次控制问题的基本结果. 考虑在区间$[K,N]$上的动力学系统

$$x(i+1)=Ax(i)+Bu(i) \quad i=K,\cdots,N-1 \tag{2.1}$$
$$x(K)=x_K$$

这里 $x(i)$ 是 n 维状态向量，$u(i)$ 是 m 维控制向量，A 和 B 是

* 指状态在 j 步之后取零. ——译者注

维数与 x 和 u 相容的矩阵. 令 U_K^{N-1} 是一个控制序列 $u(K)$, $u(K+1)$, $\cdots$, $u(N-1)$, 而由初始状态 x_K, 控制序列 U_K^{N-1} 和终端加权矩阵 S 确定的指标泛函为

$$V_{N-K}[x_K, U_K^{N-1}, S] = x'(N)Sx(N) + \sum_{i=K}^{N-1}\{x'(i)Qx(i) + 2x'(i)Cu(i) + u'(i)Ru(i)\} \tag{2.2}$$

其中 $x(K)$, $x(K+1)$, $\cdots$, $x(N)$ 是由 U_K^{N-1} 和 x_K 所产生的系统(2.1)的轨迹. 矩阵 Q, C, R 和 S 有相应的维数,而 Q, R 和 S 是对称的. (这里还没有正定性之类的假定). 最后,令

$$V_{N-K}^*[x_K, S] = \inf_{U_K^{N-1}} V_{N-K}[x_K, U_K^{N-1}, S] \tag{2.3}$$

考虑一族具下标 $K=0, 1, \cdots, N-1$ 的动力学系统(2.1)和指标泛函(2.2). 那么,离散时间的线性二次控制问题就可按以下两部分来提出.

1. 对于每个 x_K,以及 $K=0,\cdots,N-1$,寻求使 $V_{N-K}[x_K, U_K^{N-1}, S]$ 具有不依赖于 U_K^{N-1} 的下界的充分必要条件.

2. 若这些条件成立,确定 $V_{N-K}^*[x_K, S]$ 以及如果它存在的话, 确定依赖于 x_K 的控制序列 U_K^{*N-1}, 使得对于每个 $K=0, \cdots, N-1$, 都有

$$V_{N-K}^*[x_K, S] = V_{N-K}[U_K^{*N-1}, S]. \tag{2.4}$$

作为术语, 每当(2.4)式有解时, 我们将称控制问题在 $[0, N]$ 上对于终端加权矩阵 S 是有解的.

这个问题的解是大家所熟知的, 它主要依赖于下面这个引理,不过对此引理这里不加证明. 符号 $N(X)$, $X^\#$, $X \geqslant 0$ (>0)分别表示矩阵 X 的零空间, Moore-Penrose 伪逆,非负性(正定性)的意思.

引理 IV.2.1 考虑二次型 $q(y, v) = y'Fy + 2y'Hv + v'Gv$，其中矩阵 $F = F'$，$G = G'$，H以及向量 y，v 是任意的，但具有相容的维数，令 $q^*(y) = \inf_v q(y, v)$. 以下三个条件是等价的:

(a) 对于每个 y，$q^*(y) > -\infty$，

(b) $G \geqslant 0$，$N(G) \subseteq N(H)$，

(c) 存在一个对称矩阵 X，使得

$$\begin{bmatrix} F-X & H \\ H' & G \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

进而，若上述条件中的任何一个成立，那么 $X^* = F - HG^{\#}H'$ 满足条件(c). 此外，对于满足(c)的任何一个 X，都有 $X^* \geqslant X$. 最后，若对于每个 y，让 $v^* = -G^{\#}H'y$，则有

$$q^*(y) = q(y, v^*) = y'X^*y.$$

利用这个引理和下面的定义，我们就能够给出(2.4)式的解.

定义 以$\mathscr{S}$表示可允许的加权矩阵集，是使 $B'PB + R \geqslant 0$ 和 $N(B'PB + R) \subseteq N(A'PB + C)$ 的 $n \times n$ 阶的对称矩阵 P 所构成的集(下面将会弄清楚这样定义的原因).

评注 2.1 就某种意义来说，集合$\mathscr{S}$的一端是开的. 特别是，若 $S_0 \in \mathscr{S}$，而 $S \geqslant S_0$，那么，$S \in \mathscr{S}$. 为了证明这一点，我们必须证明 S 的两个性质: (a) $B'SB + R \geqslant 0$，(b) $N(B'SB + R) \subseteq N(A'SB + C)$. 若把 $B'SB + R$ 写成 $(B'S_0B + R) + B'(S - S_0)B$，很容易推出性质(a). 对于性质(b)，假设 $u \in N(B'SB + R)$. 那么，因为 $B'S_0B + R \geqslant 0$ 以及 $S \geqslant S_0$，可以断言 $u \in N(B'S_0B + R)$，以及 $(S - S_0)Bu = 0$. 然而，$S_0 \in \mathscr{S}$. 所以 $u \in N(A'S_0B + C)$，利用 $(A'SB + C)u = (A'S_0B + C)u + A'(S - S_0)Bu$，就可以

得出上述结果.

现在，可以把问题(2.4)的解写作

定理 IV.2.1 对于终端加权矩 S，该控制问题在 $[0, N]$ 上有解的充分必要条件是 $n \times n$ 阶的对称矩阵 $P(i+1) \in \mathscr{S}$，其中 $i = 0, \cdots, N-1$，而 $P(i)$ 由以下递推公式决定

$$\begin{aligned} P(i) = {} & A'P(i+1)A + Q \\ & - [A'P(i+1)B + C][B'P(i+1)B \\ & + R]^{\#}[A'P(i+1)B + C]', \\ & \qquad i = 0, \cdots, N-1 \\ & P(N) = S. \end{aligned} \tag{2.5}$$

若 $P(i)$ 由上式所决定，那么，由下式所决定的控制序列 U_K^{*N-1}

$$\begin{aligned} u^*(i) = {} & -[B'P(i+1)B + R]^{\#}[A'P(i+1)B \\ & + C]'x(i), \\ & \qquad i = K, \cdots, N-1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

对于每个 $K = 0, \cdots, N-1$ 均能达到它的下确界. 也就是，当 $U_K^{*N-1} = [u^*(K), \cdots, u^*(N-1)]$ 时，就有

$$\begin{aligned} V_{N-K}^*[x_K, S] &= V_{N-K}[x_K, U_K^{*N-1}, S] \\ &= x_K'P(K)x_K. \end{aligned} \tag{2.7}$$

证明 应用引理 2.1 和最优性原理就可以得出上述结论.

评注 2.2 1. 若对于某个 $i = 0, \cdots, N-1$，有 $P(i+1) \notin \mathscr{S}$，那么，至少存在一个 x_i，使得 $V_{N-i}^*[x_i, S] = -\infty$.

2. 注意 $P(i)$ 也是终端加权矩阵 $S \in \mathscr{S}$ 的函数. 如果我们希望把这种依赖关系明显地表达出来，可以将 $P(i)$ 记作 $P(i, S)$.

3. 若对于每个 $i = 0, \cdots, N-1$，$B'P(i+1)B + R$ 都是非奇异的，那么，由(2.6)式所决定的最优控制序列 U_0^{*N-1} 是唯一的，因此 $K = 0$ 时系统(2.1)由 U_0^{*N-1} 和 x_0 所得到的最

优轨迹是唯一的．若对于某个 $i=0,\cdots,N-1$，$B'P(i+1)B+R$ 是奇异的，那么，在 i 时刻的最优控制是不唯一的(也就是可能有另外一个不同于(2.6)的最优控制)，相应地，最优轨迹状态 $x^*(i+1)$ 也是不唯一的．然而，由(2.6)式所决定的 $u^*(i)$ 是在 i 时刻具有最小模的最优控制，这样一来，它又是唯一决定的．为了以后引用方便起见，我们把由(2.6)式所决定的控制序列 U_K^{*N-1} 称为最小模的最优控制序列．

4．若 $P(i+1)\in\mathscr{S}$，那么，由方程(2.5)所决定的矩阵 $P(i)$ 也可由下式的最大对称解来表示：

$$\begin{bmatrix} A'P(i+1)A+Q-P(i) & A'P(i+1)B+C \\ B'P(i+1)A+C' & B'P(i+1)B+R \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{2.8}$$

这个事实将被用于本章后面所要进行的状态空间的降维过程．

以上论述是解线性二次控制问题的标准方法，其中 $P(N-i,S)$ 分别由关于各个控制 $u(N-1)$，$u(N-2)$，$\cdots$，$u(N-i)$ 的一系列极小化而依次决定的．然而，如果适当地定义动力学系统和指标，就可以通过关于推广的控制向量，$u'_{(i)}(N-i)\triangleq[u'(N-i)\cdots u'(N-1)]$ 的极小化直接算出 $p(N-i,S)$ 来．

特别是，考虑 $i=2$ 的情形，所考虑的区间为 $[N-2,N]$．根据(2.1)式和(2.2)式，当 $K=N-2$ 时，其动力学系统可表示为

$$x(N)=A_{(2)}x(N-2)+B_{(2)}u_{(2)}(N-2) \tag{2.9}$$

其中 $A_{(2)}\triangleq A^2$，$B_{(2)}\triangleq[AB\ \ B]$，而指标为

$$\begin{aligned} V_{(2)}[x(N-2),U_{N-2}^{N-1},S]&=x'(N)Sx(N) \\ &+\{x'(N-2)Q_{(2)}x(N-2)+2x'(N-2)C_{(2)}u_{(2)}(N-2) \\ &+u'_{(2)}(N-2)R_{(2)}u_{(2)}(N-2)\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中

$$Q_{(2)} \triangleq A'QA + Q$$
$$C_{(2)} \triangleq [A'QB + C \quad A'C]$$
$$R_{(2)} \triangleq \begin{bmatrix} B'QB + R & B'C \\ C'B & R \end{bmatrix}$$

因此，若与(2.1)式和(2.2)式相连系的控制问题在$[0, N]$上对于终端加权矩阵S是有解的，那么，$P(N-2, S)$就可以由下式给出

$$\begin{aligned} P(N-2,S) = & A'_{(2)}SA_{(2)} + Q_{(2)} \\ & - [A'_{(2)}SB_{(2)} + C_{(2)}][B'_{(2)}SB_{(2)} + R_{(2)}]^{\#} \\ & [A'_{(2)}SB_{(2)} + C_{(2)}]' \end{aligned} \tag{2.11}$$

为了方便起见，我们把上述问题称作具有终端加权矩阵S的第二级控制问题.

一般情况下，假设具有终端加权矩阵S的第j级控制问题已经由$A_{(j)}$，$B_{(j)}$，$Q_{(j)}$，$C_{(j)}$，$R_{(j)}$和$u_{(j)}(i)$等量所决定；那么，具有终端加权矩阵S的第$(j+1)$级控制问题就由以下这些量所决定

$$\begin{aligned} & A_{(j+1)} \triangleq A_{(j)}A \\ & B_{(j+1)} \triangleq [A_{(j)}B \quad B_{(j)}] \\ & Q_{(j+1)} \triangleq A'Q_{(j)}A + Q \\ & C_{(j+1)} \triangleq [A'Q_{(j)}B + C_{(j)} A'C_{(j)}] \\ & R_{(j+1)} \triangleq \begin{bmatrix} B'Q_{(j)}B + R & B'C_{(j)} \\ C'_{(j)}B & R_{(j)} \end{bmatrix} \\ & u_{(j+1)} \triangleq [u'_{(j)}(i) \quad u'(i+j)] \end{aligned} \tag{2.12}$$

显然，如果与(2.1)式和(2.2)式相连系的控制问题在$[0, N]$上有解，那么，具有终端加权矩阵$P(i+j, S)$的，由

$$x(i+j) = A_{(j)}x(i) + B_{(j)}u_{(j)}(i) \tag{2.13}$$

和

$$
\begin{aligned}
&V_{(j)}[x(i), u_{(j)}(i), P(i+j, S)] \\
&\quad = x'(i+j)P(i+j,S)x(i+j) \\
&\qquad + \{x'(i)Q_{(j)}x(i) + 2x'(i)C_{(j)}u_{(j)}(i) \\
&\qquad + u'_{(j)}(i)R_{(j)}u_{(j)}(i)\}
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

所决定的第 j 级控制问题对于所有的 $[i, i+j]\subset[0, N]$ 都有解,反之也成立. 而且

$$
\begin{aligned}
P(i, S) = {} & A'_{(j)}P(i+j, S)A_{(j)} + Q_{(j)} \\
& - [A'_{(j)}P(i+j, S)B_{(j)} + C_{(j)}][B'_{(j)}P(i+j, S)B_{(j)} \\
& + R_{(j)}]^{\#}[A'_{(j)}P(i+j, S)B_{(j)} + C_{(j)}]'
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

这里最优控制 $u^*_{(j)}(i)$ 等价于最优序列 U_i^{*i+j-1}. 此外, 最优控制的存在性意味着条件 $P(i+1)\in S$, 可由下式代替:

$$
\begin{aligned}
N[B'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)} + R_{(j)}]\subset N[A'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)} \\
+ C_{(j)}]
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

存在性还意味着 $B'_{(j)}P(i+j, S)B_{(j)} + R_{(j)} \geqslant 0$, 不过以后我们将更多地利用(2.16)式.

令 $i+j=N$, (2.15) 式成为 $P(N-j, S)$ 的方程式. 当然, 利用第 j 级的公式去计算 $P(N-j, S)$ 是毫无用处的. 尽管如此,在理论上还是有意义的,以后就会明白: 第 j 级控制问题的 1-常值方向等于原来控制问题的 j-常值方向. (关于 j-常值方向的定义可参考下一节).

4.3 常值方向的基本性质

正如引言中所述,我们感兴趣的是这样一些方向,在这些方向上 Riccati 方程(2.5)完全决定于系数矩阵 (可能除了最后一段过渡过程以外),而又不依赖于终端加权矩阵 S. 如果这样的方向存在的话, 那么, Riccati 方程实际上比它所表现出的阶数要低,而且递推地求解(2.5)就意味着在递推公式的

每一步上进行多余的计算.

如同文献[1]中所述，对于常值方向的概念，我们给出如下的定义:

定义 3.1 设 $1 \leqslant j \leqslant N-1$. n 维向量 α 称作是(2.5)式在$[0, N]$上的j-常值方向，当且仅当 $P(i, S)\alpha$ 不依赖 $\mathscr{S}$ 中的 S (对于它们最优控制问题的解是存在的)，同时也不依赖于 i，这里，$i=0, 1, \cdots, N-j$.

用 I_j 表示 j-常值方向的集合. 显然，每个 I_j 是一个有限维的线性空间，因此就可以用一组有限多个线性无关的向量来完全描述. 此外，对于 $1 \leqslant j \leqslant N-2$，可以直接推出 $I_{j+1} \supseteq I_j$.

明了j-常值方向的其他各种有用的特性也是有意义的，这一节的主要任务就在于研究这些特性. 其中一个特性就是以前提到过的，涉及到一个状态在 j 步之后最优地取作零的概念.

对于每个满足 $1 \leqslant j \leqslant N-1$ 的j，考虑一个限制在区间 $[N-j, N]$ 内，具有系数矩阵 A, B, Q, C 和 R，以及终端加权矩阵 $\bar{S}$，有如(2.1)式和(2.2)式的动力学系统和指标的控制问题. 假设该控制问题的初始状态为 $x(N-j)=\alpha$.

定义 3.2 我们说当 $S=\bar{S}$，在 j 步之后 α 能最优地取作零，当且仅当存在一个控制序列 U_{N-j}^{N-1}，使得(2.1)式的相应轨迹满足 $x(N-j)=\alpha$ 和 $x(N)=0$，并且 $V_j[\alpha, U_{N-j}^{N-1}, \bar{S}]=V_j^*[\alpha, \bar{S}]$. (显然，可以用(2.13)和(2.14)的第 j 级控制问题来给出等价的定义).

在文献 [1] 中证明了j-常值方向完全由终端加权矩阵为零时，j步之后最优地取作零的性质所刻划，此时$C=0, R=0$, $Q \geqslant 0$, $S \geqslant 0$ 而且 A 是可逆的. 此外，1-常值方向不仅可用这种形式来刻画，还可简单地当作是矩阵 $A^{-1}B$ 的值域，而j-

常值方向与矩阵 W_j（文献[1]中所定义的)的零空间有关. 这一节的其余部分将把这些结果推广到具有任意系数矩阵的控制问题中去，只要该控制问题对于某个终端加权矩阵 $S\in\mathscr{S}$ 在$[0,N]$上有解. 下面的定理 3.1 包含这个主要结论；在此以前先讲几个引理.

定义 $(n+jm)\times(n+jm)$ 阶的矩阵

$$\Lambda_{(j)}=\begin{bmatrix}A_{(j)} & B_{(j)}\\ C'_{(j)} & R_{(j)}\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

这个矩阵在分析常值方向时是一个重要工具，我们首先证明它的零空间中的向量决定了常值方向.

引理 IV.3.1 假设 $W_{(j)}\in N(\Lambda_{(j)})$ 以及 $W'_{(j)}$ 的分块形式为 $[\alpha',\beta'_{(j)}]$，其中 α 是 n 维的，$\beta_{(j)}$ 是 jm 维的. 那么，若该控制问题对于终端加权矩阵 S 在$[0,N]$上有解，就有

$$P(i,S)\alpha=Q_{(j)}\alpha+C_{(j)}\beta_{(j)}\qquad\text{对于每个 } i=0,1,\cdots,N-j \tag{3.2}$$

因此，α 是一个 j-常值方向.

证明 因为 $W_{(j)}\in N(\Lambda_{(j)})$，就有

$$\begin{aligned}A_{(j)}\alpha+B_{(j)}\beta_{(j)}&=0\\ C'_{(j)}\alpha+R_{(j)}\beta_{(j)}&=0\end{aligned} \tag{3.3}$$

用 α 右乘(2.15)式，利用(3.3)式，可以得到

$$\begin{aligned}P(i,S)\alpha=&A'_{(j)}P(i+j,S)A_{(j)}\alpha+Q_{(j)}\alpha\\ &-[A'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}+C_{(j)}][B'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}\\ &+R_{(j)}]^{\#}[A'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}+C_{(j)}]'\alpha\\ =&-A'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}\beta_{(j)}+Q_{(j)}\alpha\\ &+[A'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}+C_{(j)}][B'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}\\ &+R_{(j)}]^{\#}[B'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}+R_{(j)}]\beta_{(j)}\end{aligned}$$

根据假设，该控制问题对于终端加权矩阵 S 有解. 所以，对于每个 $[i,i+j]\subset[0,N]$，条件(2.16)成立，从而有恒等式

$$A'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}+C_{(j)}=[A'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}+C_{(j)}]$$
$$[B'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}+R_{(j)}]^{\#}[B'_{(j)}P(i+j,S)B_{(j)}+R_{(j)}] \tag{3.4}$$

将(3.4)式代入前式，就得到(3.2)式.

评注 3.1 1. 假设 $x(N-j)=\alpha$ 和 $u_{(j)}(N-j)=\beta_{(j)}$. 那么，鉴于(3.3)的第一个方程，这个控制就会导致 $x(N)=0$. 其次，利用(2.14)式，并令其中 $i+j=N$，以及根据 $x(N)=0$ 的事实，就可以算出性能指标 $V_{(j)}[x(N-j), U_{N-j}^{N-1}, S]$的值为

$$V_{(j)}[x(N-j),U_{N-j}^{N-1},S]=\alpha'Q_{(j)}\alpha+2\alpha'C_{(j)}\beta_{(j)}+\beta'_{(j)}R_{(j)}\beta_{(j)}$$
$$=\alpha'P(N-j,\ S)\alpha.$$

第二个等式可根据(3.2)和(3.3)得到. 这样一来，不仅 α 有着常值方向的意义，而且 $\beta_{(j)}$ 是将 $x(N-j)$转移到 $x(N)=0$ 的最优控制序列.

2. 在 $N[A_{(j)}]$ 里可能存在两个不同的向量 $W_{(j)}=[\alpha'\beta'_{(j)}]'$ 和 $\overline{W}_{(j)}=[\alpha'\overline{\beta}'_{(j)}]'$. 于是 $\beta_{(j)}-\overline{\beta}_{(j)}\in N[B'_{(j)}]'$; 利用这一点以及(2.16)式，还可以推出 $\beta_{(j)}-\overline{\beta}_{(j)}\in N[C_{(j)}]$. 在这种情况下，利用$\beta_{(j)}$ 和 $\overline{\beta}_{(j)}$ 得到的性能指标是一样的. 当这种情况出现时，不唯一性表明了存在多余的控制，对此我们将在下一节进行更充分的研究.

如果对于终端加权矩阵 S_0，该控制问题在$[0, N]$上有解，那么，对于每个满足 $S\geqslant S_0$ 的终端加权矩阵 S，在$[0, N]$上它仍然是有解的. 根据引理 3.1，在其假设条件下我们可以断言：对于每个$S\geqslant S_0$，和任意的$K=j,\cdots,N$，利用由$\beta_{(j)}$所定义的控制序列，可以达到最优解 $V_K^*[\alpha,S]=V_K^*[\alpha,S_0]$. 下面的引理就是要研究对于某个状态 α 和某个j，有关性能指标的这一等式的一些推论.

引理 IV.3.2 假设对于某个状态α 和所有的 $S\geqslant S_0$，其

中 $S_0\in\mathscr{S}$，有 $V_j^*[\alpha,S]=V_j^*[\alpha,S_0]$. 于是，对于 $\bar{S}>S_0$，有(上面一横表示考虑的是终端加权矩阵 $\bar{S}$)：

(a) 对于与 $\bar{S}$ 相连系的任何最优控制序列 $\bar{U}_{N-j}^{*N-1}$，有 $\bar{x}^*(N)=0$.

(b) 对于所有的 $S\geqslant S_0$，

$$V_j^*[\alpha,S]=V_j[\alpha,\bar{U}_{N-j}^{*N-1},S]=V_j^*[\alpha,S_0].$$

证明 根据假设条件，对于任意的控制序列 U_{N-j}^{N-1}，有 $V_j^*[\alpha,\bar{S}]=V_j^*[\alpha,S]\leqslant V_j[\alpha,U_{N-j}^{N-1},S_0]$，所以对与终端加权矩阵 $\bar{S}$ 相连系的任何一个最优控制序列 $\bar{U}_{N-j}^{*N-1}$，上式也成立. 因而有

$$V_j^*[\alpha,\bar{S}]=V_j[\alpha,\bar{U}_{N-j}^{*N-1},S_0]+\bar{x}^{*\prime}(N)(\bar{S}-S_0)\bar{x}^*(N).$$

因为 $\bar{S}>S_0$，所以 $\bar{x}^*(N)=0$. 这就证明了(a). 关于(b)则可显然地推出.

由上述引理的(a)和(b)，可以推得：

推论 3.1 假设对于某个状态 α 和所有的 $S\geqslant S_0$，其中 $S_0\in\mathscr{S}$，有 $V_j^*[\alpha,S]=V_j^*[\alpha,S_0]$. 那么，对于所有的 $S\geqslant S_0$，α 可以在 j 步之后最优地达到零.

重要的是，应注意到在推论 3.1 中，对于 $S\geqslant S_0$，但 $S\not>S_0$，α 在 j 步之后最优地达到零，并不能保证最优控制是最小模的. 然而，由于定义 3.2 只要某个最优控制使 α 在 j 步之后取零，而不一定要是最小模的控制，推论 3.1 的结论就不是无意义的.

作为推论的逆命题，我们叙述如下：

引理 IV.3.3 假设对于某个 $S_0\in\mathscr{S}$，α 在 j 步之后能够最优地取为零. 那么，对于所有的 $S\geqslant S_0$，α 在 j 步之后就能够最优地取为零，而 $V_j^*[\alpha,S]=V_j^*[\alpha,S_0]$.

证明 容易验证对于 $S_0\in\mathscr{S}$，能够使 α 最优地取为零的

控制，对于所有的 $S \geqslant S_0$ 也是最优的.

我们已经证明 $A_{(j)}$ 的零空间的向量决定了可最优地被取为零的状态. 现在，让我们来验证这个想法是可逆的.

引理 IV.3.4 假设对于所有的 $S \geqslant S_0$，其中 S_0 是 $\mathscr{S}$ 中的某个元素，α 可以在 j 步之后最优地取作零. 那么，必定存在向量 $\beta_{(j)}$，使得对于 $W'_{(j)} = [\alpha' \ \beta'_{(j)}]$，有 $W_{(j)} \in N(A_{(j)})$.

证明 在终端加权矩阵 $\bar{S} > S$ 的条件下，引理 3.2 表明借助于任何的最优控制 U^{*N-1}_{N-j}，或与它相当的 $u^*_{(j)}(N-j)$，α 可以在 j 步之后最优地取作零. 特别，一个这样的最优控制是最小模的控制.

$$\bar{u}^*_{(j)}(N-j) = -[B'_{(j)}\bar{S}B_{(j)} + R_{(j)}]^{\#}[A'_{(j)}\bar{S}B_{(j)} + C_{(j)}]'\alpha \tag{3.5}$$

由于 $\bar{x}^*(N) = 0$，就有

$$A_{(j)}\alpha - B_{(j)}[B'_{(j)}\bar{S}B_{(j)} + R_{(j)}]^{\#}[A'_{(j)}\bar{S}B_{(j)} + C_{(j)}]'\alpha = 0. \tag{3.6}$$

由于 $\bar{S} \in \mathscr{S}$，所以对于 $P(i+j, S) = \bar{S}$，恒等式(3.4)成立，连同(3.6)式一起就给出

$$C'_{(j)}\alpha - R_{(j)}[B'_{(j)}\bar{S}B_{(j)} + R_{(j)}]^{\#}[A'_{(j)}\bar{S}B_{(j)} + C_{(j)}]'\alpha = 0 \tag{3.7}$$

因此，借助于 $\beta_{(j)} = \bar{u}^*_{(j)}(N-j)$，(3.6)和(3.7)式就变成为 $A_{(j)}\alpha + B_{(j)}\beta_{(j)} = 0$ 和 $C'_{(j)}\alpha + R_{(j)}\beta_{(j)} = 0$. 引理证完.

现在把以上结果综述如下:

定理 IV.3.1 假设对于某个终端加权矩阵 S，控制问题的解在 $[0, N]$ 上存在. 那么，以下论述是等价的.

(a) α 是(2.5)在$[0, N]$上的 j-常值方向.

(b) 对于所有的$S \in \mathscr{S}$，α 在 j 步之后可最优地取为零.

(c) 存在 $W_{(j)} \in N(A_{(j)})$，且 $W'_{(j)} = [\alpha' \ \beta'_{(j)}]$.

(d) ((a) 的狭义的形式). 对于某个 $S_0 \in \mathscr{S}$ 和所有的

$S \geqslant S_0$，有 $V_j^*[\alpha, S] = V_j^*[\alpha, S_0]$.

(e) ((b)的狭义的形式). 对于某个 $S_0 \in \mathscr{S}$，α 能够在 j 步之后最优地取为零.

而且，如果上述各项中的任何一个成立，那么，与 $S \in \mathscr{S}$ 相连系的任何一个最优控制使 α 取为零，其中 S 满足条件：对于某个 $\eta > 0$，有 $S - \eta I \in \mathscr{S}$.

证明 根据推论 3.1，引理 3.3，引理 3.4 与推论 3.1 以及引理 3.1 可以相应地推出(a) $\Longrightarrow$ (b)，(e) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a). 最后(b) $\Longrightarrow$ (e)是显然的. 定理的最后部分是引理 3.2 的推论. 定理证完.

我们还可以得到定理 3.1 的 (a) 和 (c) 以及评注 3.1.2 的以下简单推论.

定理 IV.3.2 假设对于某个终端加权矩阵 S，控制问题在$[0, N]$上有解. 那么，j-常值方向构成的空间 I_j 是 W_{j1} 的值域，其中 $W_j = [W_{j1}' \; W_{j2}']'$ 是$N(\Lambda_{(j)})$的基矩阵. 而且，I_j 的维数等于 $s_j - p_j$，其中 s_j 是 $\Lambda_{(j)}$ 的零度，p_j 是$[B_{(j)}' \; R_{(j)}']'$ 的零度.

在这一节里，我们并不特别关心 1-常值方向. 关于这一点放到下一节去研究，因为 1-常值方向是最容易得到的（显然，$N(\Lambda_{(1)})$比 $N(\Lambda_{(j)})$容易计算)，当这情况出现时，j-常值方向可以通过计算一系列问题的 1-常值方向来得到.

然而，我们下面紧接着的任务是研究多余控制问题.

4.4 控制空间维数的降低

在本节和下一节里，我们将集中考虑 1-常值方向存在的情形. 在前一节的定理 3.2 中已经证明线性无关的 1-常值方向的个数 l 就等于 $N(\Lambda)$ 的维数 s 减去 $[B' \; R']'$ 的零空间

的维数 p. 这一节将要证明如果 $l < s$, 即 $p > 0$, 我们就能找到控制空间的一组基,使得动力学系统(2.1)和指标(2.2)不依赖于控制向量 u 的 p 个分量. 因此,该控制问题在 $[0, N]$ 上的解就等价于一个状态空间具有相同的基, 而控制空间的维数较低的控制问题在$[0, N]$上的解.

对于 p 等于零的情形,控制空间的维数将不可能降低.目前暂且假定 $0 < p < m$. 这时可以证明控制空间的维数可以降低 p. (以后再处理 $p \geqslant m$ 的情形). 令W是 $N(\Lambda)$ 的基矩阵, $\Lambda W = 0$ 的分块形式为

$$\begin{matrix} n\{ \\ m-p\{ \\ p\{ \end{matrix}\underbrace{\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1' & R_{11} & R_{12} \\ C_2' & R_{12}' & R_{22} \end{bmatrix}}_{n \quad m-p \quad p}\underbrace{\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \\ W_{31} & W_{32} \end{bmatrix}}_{l \quad p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

其中各个矩阵块的维数如上所标.

借助于列的运算对 $N(\Lambda)$ 作基变换,借助于对W的最后 m 行作行的运算来对控制空间作基变换, 就可以使W变为更适当的形式. 特别是因为$[W_{11}\ W_{12}]$是 $n \times s$ 阶的,列秩为 l 的矩阵,必定存在一个 $s \times s$ 阶的非奇异矩阵 T, 使得 $[W_{11}\ W_{12}]T = [\overline{W}_{11}\ \ 0]$, 其中 $\overline{W}_{11}$ 是满列秩 l 的. 利用 T 把 $N(\Lambda)$ 的基变为 $\overline{W} = WT$, 其中

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} \overline{W}_{11} & 0 \\ \overline{W}_{21} & \overline{W}_{22} \\ \overline{W}_{31} & \overline{W}_{32} \end{bmatrix}.$$

因为 $\overline{W}$ 是满列秩的,所以 $[\overline{W}_{22}'\ \overline{W}_{32}']'$ 也是满列秩的. 因而存在$m \times m$阶的非奇异矩阵 U, 使得 $U[\overline{W}_{22}'\ \overline{W}_{32}']' = [\ 0\ I_p]'$. 利用$U$对控制空间的基作变换. 丢掉上面一横的符号, 我们就得到控制空间的一组基,使得 $N(\Lambda)$ 的基矩阵W为

$$W=\begin{bmatrix}W_{11} & 0\\ W_{21} & 0\\ W_{31} & I_p\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

这个结果还可以通过直接构造 $N(A)$ 的基

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\alpha_l\\ \beta_l\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\ \beta_{l+1}\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\ \beta_s\end{bmatrix}$$

的办法来得到。这样的一组基的存在性是根据 $s=l+p$ 推出的。

根据W的特殊形式,可以看出 $AW=0$ 就意味着

$$B_2=0,\ R_{12}=0,\ R_{22}=0. \tag{4.3}$$

假设该控制问题对于终端加权矩阵 S,在$[0, N]$上有解。那么,因为 $N[B'SB+R]\subset N[A'SB+C]$,而且每一个由 p 维向量 v 组成的形如$[0,v']'$ 的m维向量都在 $N[B'SB+R]$ 之中,可以推出 $C'v=0$。由于 v 是任意的,所以 $C_2=0$。

将控制u 分块为 $[u_1'\ u_2']'$,其中 u_2 是 p 维的。于是,动力学系统(2.1)就变为

$$\begin{gathered}x(i+1)=Ax(i)+B_1u_1(i)\\ i=0,\cdots,N-1\\ x(0)=x_0\end{gathered} \tag{4.4}$$

指标(2.2)就变为

$$V[x_0,U_0^{N-1},S]=x'(N)Sx(N)$$
$$+\sum_{i=0}^{N-1}\{x'(i)Qx(i)+2x'(i)C_1u_1(i)+u_1'(i)R_{11}u_1(i)\} \tag{4.5}$$

因此,具有动力学系统(2.1)和指标(2.2)的控制问题在$[0, N]$上有解,当且仅当动力学系统为(4.4),指标为(4.5),而控制空间为$m-p$ 维的控制问题在 $[0, N]$ 上有解。此外,从下面的引理 4.1 中可以看到,这两个控制问题的解有着简单的关系。

剩下的问题是考虑$p=s-l\geqslant m$的可能性. 由于p是$[B'\ R]'$的零空间的维数,而$[B'\ R]'$有m列,所以必定有$p=m$,而$B=0$, $R=0$. 只要对$p<m$的情形的论证稍作修正,就可以得出$C=0$(假定最优解是存在的). 于是,可以看到控制向量u不会影响动力学系统(2.1)和指标(2.2);控制问题在$[0,N]$上是平凡的.

关于这一节的结果综述如下:

引理 IV.4.1 假设$N(\Lambda)$是s维的,$N(\Lambda)$的基矩阵W的前n行W_1,而W_1的秩是l,令$p=s-l\geqslant 0$. 那么,对于终端加权矩阵S,该控制问题在$[0,N]$上有解的必要充分条件为对于该终端加权矩阵S,有着同样形式、但具有$m-p$维控制的另一控制问题在$[0,N]$上有解. 此外,它们相应的Riccati方程的解$P(i,S)$也是一样的,其中$i=0,\cdots,N-1$,而且原来的控制空间存在一组基,使得任何在时刻i的最优控制$u^*(i)$均由$[u_1^{*\prime}(i)\ u_2^{*\prime}(i)]'$所给定,其中$u_1^*(i)$是控制维数较低的问题的任何一个最优控制,而$u_2^*(i)$是任意选取的. 特别是对于具有最小模的最优控制$u^*(i)$, $u_1^*(i)$是对应的较低维控制的问题的具有最小模的最优控制,而$u_2^*(i)=0$.

根据这个引理,可以清楚地看到,当$p>0$时,有关原来的控制问题的 Riccati 方程求解所需要的计算量可以降为对同样阶数的动力学系统,但控制维数较低的一个问题的求解所需要的计算量. 这个引理类似于上一章所讨论过的,有关连续时间的线性二次奇异控制问题的结论.

4.5 状态空间维数的降低

在这一节里,我们假设矩阵$[B'R]'$是满列秩的,或者同

样地假定所有的多余控制都已删除． 那么，我们知道 I_1 的维数就等于 $\Lambda=\Lambda_{(1)}$ 的零度；令它为 l． 我们将要证明：若存在非平凡的 1-常值方向，也就是 $l>0$，则状态空间的维数可以降低 l，且相应的控制问题可以定义在区间 $[0,N-1]$ 上，而不是在 $[0,N]$ 上．此外，在 $[0,N]$ 上 Riccati 方程的解以及最优控制较之在 $[0,N-1]$ 上，低维状态空间的问题的解以及最优控制其间有着简单的关系．

这个过程的第一步是选取状态空间的一组基，以便显示出矩阵 $P(i,S)$ 的常数部分，其中 $i=0,\cdots,N-1$．除了张成 I_1 的向量 $\{\alpha_{n-l+1},\cdots,\alpha_n\}$ 以外，任意选取其余的向量，使 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 成为状态空间的一组基．利用这组基，就有

$$P(i,S)=\begin{matrix}\\ l\{\end{matrix}\begin{bmatrix}P_{11}(i,S) & P_{12}\\ P_{12}' & P_{22}\end{bmatrix},\ i=1,\cdots,N-1 \tag{5.1}$$

这里 P_{12} 和 P_{22} 是不依赖于 S 和 $i=1,\cdots,N-1$ 的常数矩阵．

根据我们的假定，$[B'R]'$ 是满列秩的，我们知道对于每个 α_i，$i=n-l+1,\cdots,n$，必定存在唯一的 β_i，使得 $W_i=[\alpha_i'\ \beta_i']'\in N(\Lambda)$． 令 Z 是矩阵 $[\beta_{n-l+1},\cdots,\beta_n]$． 那么，与 $P(i,S)$ 相一致的 Q 和 C 的分块形式为

$$Q=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12}' & Q_{22}\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix} \tag{5.2}$$

在状态空间的这样一组基上，引理 3.1 的结论可以重述为

$$\begin{aligned}P_{12}&=Q_{12}+C_1Z\\ P_{22}&=Q_{22}+C_2Z\end{aligned} \tag{5.3}$$

这样一来，作为 $P(i,S)$ 的常数部分(其中 $i=0,\cdots,N-1$)，我们完全确定了 P_{12} 和 P_{22}．而且，第三节中的定理告诉我们；$P_{11}(i,S)$ 中再没有不依赖于 $i=0,\cdots,N-1$ 和 $S\in\mathscr{S}$ 的部

分了,虽然$P_{11}(i,S)$某些部分可以不依赖于$i=0,\cdots,N-2$(假如$P_{11}(i,S)$的某些部分真是不依赖于$i=0,\cdots,N-1$和$S\in\mathscr{S}$,那么,就会存在某个向量在$N(\Lambda)$中,而不在I_1中,这样就会引起矛盾).

由于(5.3)式,通过在$[0,N]$上的 Riccati 方程(2.5)来计算$P(i,S)$的值,显然会涉及到大量不必要的计算. 如果我们能够证明$P_{11}(i,S)$,其中$i=0,\cdots,N-1$,可以通过关于P_{11}的,而不是P的 Riccati 方程计算出来(这里可能涉及到不同的A,B,Q,C和R),那将是很有意义的. 注意到 Riccati 方程(3.5)的解是使下面不等式成立的最大的对称矩阵$P(i,S)$

$$\begin{bmatrix} A'P(i+1,S)A+Q-P(i,S) & A'P(i+1,S)B+C \\ B'P(i+1,S)A+C' & B'P(i+1,S)B+R \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{5.4}$$

其中$i=0,\cdots,N-1$,$P(N,S)=S_0$把A分成$A=[A_1A_2]$,于是,(5.4)式可以写成

$$\begin{bmatrix} A_1'P(i+1,S)A_1+Q_{11}-P_{11}(i,S) & A_1'P(i+1,S)A_2+Q_{12}-P_{12} & A_1'P(i+1,S)B+C_1 \\ A_2'P(i+1,S)A_1+Q_{12}'-P_{12}' & A_2'P(i+1,S)A_2+Q_{22}-P_{22} & A_2'P(i+1,S)B+C_2 \\ B'P(i+1,S)A_1+C_1' & B'P(i+1,S)A_2+C_2' & B'P(i+1,S)B+R \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.5}$$

因为向量W_i构成$N(\Lambda)$的基矩阵,就还有关系式

$$\begin{aligned} A_2+BZ&=0 \\ C_2'+RZ&=0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

用非奇异矩阵

$$T=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & Z \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

左乘(5.5)式，再用 T' 右乘其结果. 利用(5.3)式和(5.6)式，就可以得到另外一个与(5.5)式等价的矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} A_1'P(i+1,S)A_1+Q_{11} & 0 & A_1'P(i+1,S)B+C_1 \\ -P_{11}(i,S) & & \\ 0 & 0 & 0 \\ B'P(i+1,S)A_1+C_1' & 0 & B'P(i+1,S)B+R \end{bmatrix} \geqslant 0$$

当然,它又等价于

$$\begin{bmatrix} A_1'P(i+1,S)A+Q_{11} & A_1'P(i+1,S)B+C_1 \\ -P_{11}(i,S) & \\ B'P(i+1,S)A_1+C_1' & B'P(i+1,S)B+R \end{bmatrix} \geqslant 0 \quad (5.7)$$

显然, $P_{11}(i,S)$是矩阵不等式(5.7)的最大解. 然而,我们知道矩阵 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \hat{P}(i,S) &= \hat{A}'\hat{P}(i+1,S)\hat{A}+\hat{Q} \\ &\quad -[\hat{A}'\hat{P}(i+1,S)\hat{B}+\hat{C}][\hat{B}'\hat{P}(i+1,S)\hat{B}+\hat{R}]^{\#} \\ &\quad [\hat{A}'\hat{P}(i+1,S)\hat{B}+\hat{C}]' \\ &\qquad i=0,\cdots,N-2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

给出了它的另一等价的定义,其中 $\hat{P}(i,S)=P_{11}(i,S)$, $\hat{A}=\hat{A}_{11}$ (假定 A_1 分作 $[A_{11}', A_{21}']'$),而其他的带帽的量就根据 P_{21}, P_{22} 以及原来的系数矩阵 A, B, Q, C 和 R 来决定. (准确的定义在附录中). 最后,用下式

$$\hat{S}=\hat{P}(N-1,S)=P_{11}(N-1,S)$$

作为 (5.8) 式的初始值.

让我们总结一下至今所得到的结果. 若 Riccati 方程(2.5)对于终端加权矩阵 S 在$[0,N]$上有解，而且 A 的零空间是 l 维的,(或同样地,假定消除了多余的控制),那么,除了状态空间和控制空间的基的变换，具有 $P(N)=S$ 的 (2.5) 在 $[0,N]$ 上的解等价于(5.8) 式在 $[0,N-1]$ 上的解，其中

$\hat{P}(N-1,S)=P_{11}(N-1,S)$，$P_{11}$ 和 P_{22} 由 (5.3) 式所决定，对于 $i=0,\cdots,N-1$ 都对.

在结束这一节前，应该指出(5.8) 式可以和这样一个控制问题相联系着，它与原来给定的问题有着同样的形式，且包含着带有帽号的那些量，定义在 $[0,N-1]$ 上，而不是在 $[0,N]$ 上. （这种看法给出了这样两个控制问题的最优控制之间的关系）. 假设就像这节开始时所讲述的那样来选取状态空间和控制空间的基，并把状态变量 x 分成 $[x_1' \; x_2']'$，其中 x_2 是 l 维的. 新的状态变量和控制变量由下式所决定

$$\begin{aligned}\hat{x}&=x_1\\ \hat{u}&=u-Zx_2.\end{aligned} \tag{5.9}$$

利用这些符号，根据原来的动力学系统 (2.1)，以及 $\hat{A}$，$\hat{B}$ 的定义，和(5.3)，(5.6)式，可以推出

$$\begin{aligned}\hat{x}(i+1)&=\hat{A}\hat{x}(i)+\hat{B}\hat{u}(i) \quad i=0,\cdots,N-2\\ \hat{x}(0)&=x_1(0)=\hat{x}_0.\end{aligned} \tag{5.10}$$

方程(5.10)构成在 $[0,N-1]$上的简化了的动力学系统.

用带有这些帽号的量，经过一些推导后，还可以给出:

$$\begin{aligned}V[x_0,U_0^{N-1},S]=&V[\hat{x}_0,\hat{U}_0^{N-2},\hat{S}]+x'(0)\bar{P}x(0)\\ &+[u(N-1)+(B'SB+R)^{\#}(A'SB\\ &+C)'x(N-1)]'\times(B'SB+R)[u(N-1)\\ &+(B'SB+R)^{\#}(A'SB+C)'\times x(N-1)]\end{aligned} \tag{5.11}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{V}[\hat{x}_0,\hat{U}_0^{N-2},\hat{S}]\triangleq&\hat{x}'(N-1)\hat{S}\hat{x}(N-1)\\ &+\sum_{i=D}^{N-2}\{\hat{x}'(i)\hat{Q}\hat{x}(i)+2\hat{x}'(i)\hat{C}\hat{u}(i)+\hat{u}'(i)\hat{R}\hat{u}(i)\}\end{aligned} \tag{5.12}$$

以及

$$\bar{P}=\begin{bmatrix}0 & Q_{12}+C_1Z\\ Q'_{12}+Z'C'_1 & Q_{22}+C_2Z\end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

(5.11)式的右边部分是三项之和，第一项 $V[\hat{x}_0, \hat{U}_0^{N-2}, \hat{S}]$ 依赖于 $\hat{u}(i)$和 $\hat{x}_0$，其中 $i=0,\cdots,N-2$，第三项是常数，它仅依赖于 x_0，而第三项是 $u(N-1)$ 和 $x(N-1)$ 的函数. 根据这些项的独立性和 $B'SB+R$ 的非负性，我们可以断言：$V^*[x_0, S]$ 是有限的，当且仅当 $\hat{V}^*[\hat{x}_0, \hat{S}]$ 是有限的，且满足

$$V^*[x_0, S]=\hat{V}^*[\hat{x}_0, \hat{S}]+x'(0)\bar{P}x(0) \tag{5.14}$$

总而言之，每当非平凡的1-常值方向存在时，我们总可以根据另外一个在区间 $[0, N-1]$上的、状态空间维数较低的控制问题来解在区间 $[0, N]$ 上的原控制问题. (已知 $\hat{u}(\cdot)$，$x_1(0)$，$x_2(0)$，由(5.9)式可以得到 $u(0)$，根据 $Ax(0)+Bu(0)$，可以得到 $x_1(1)$，$x_2(1)$；然后，知道了 $\hat{u}(1)$，$x_1(1)$，$x_2(1)$，根据(5.9)式可以得到 $u(1)$，等等).

现在，我们将上述主要结果总结如下：

定理 IV.5.1 假设 $N(\Lambda)$ 是 l 维的，而对于任何的基矩阵W，由W的前几行所构成的矩阵 W_1 的秩是 l. 那么，对于终端加权矩阵 $S\in\mathscr{S}$，原来的控制问题在 $[0, N]$上有解的充分必要条件为：对于终端加权矩阵 $\hat{S}$，动力学系统(5.10)和指标(5.12) 的控制问题在 $[0, N-1]$上有解，它的状态空间为 $n-l$ 维. 此外，最优指标之间有着(5.14)的关系式，任何最优控制序列 U_0^{*N-1}，根据 x_0 和 (5.9) 式与最优控制序列 U_0^{*N-2} 相关联.

4.6 问题的总体简化

在前面两节中阐明了在1-常值方向存在的情况下，怎样才能使复杂的线性二次问题得到简化. 在这一节里我们将要

研究若j-常值方向存在，其中$j>1$，会产生什么结果．主要的结论是：重复地进行用于1-常值方向的简化过程，终将消除所有具有任何标号的常值方向．为了证实这个结论，我们将大量地引用第三节中的一般理论以及前面两节的一些推导过程．

首先，我们假定某个问题的常值方向的集合包含有1-常值方向．(以后我们将会证明：若其中有j-常值方向，而$j>1$，那么，也必定有1-常值方向．所以，这样的假定实际上并没有失去一般性)．同样地，我们还假定多余的控制已经消除．这样一些假定就意味着我们可以实现上一节所作的简化过程．第一个引理就要考虑这个过程对于j-常值方向的影响，其中$j>1$．

引理 IV.6.1 假设对于某个终端加权矩阵S，该控制问题在$[0,N]$上的解存在．又设状态空间的坐标系已选取使得第五节的简化过程仍可适用．则当$j\geqslant 2$时，α是 Riccati 方程(2.5)的j-常值方向的充分必要条件是在$\alpha=[\alpha_1'\ \alpha_2']'$中，$\alpha_1$是 Riccati 方程(5.8)的$(j-1)$-常值方向，其中$\alpha_2$是$l$维的．

证明 假设α_1是 Riccati 方程(2.8)的$(j-1)$-常值方向，其中$j\geqslant 2$．那么，根据常值方向的定义，并注意到(5.8)式定义在$[0,N-1]$上，我们就有

$$\hat{P}(N-i,\hat{S})\alpha_1=\text{常数},\ i\geqslant j \tag{6.1}$$

不依赖于加权矩阵$S\in\mathscr{S}$，只要它能使简化了的问题有解．于是对于$\alpha'=[\alpha_1'\ \alpha_2']$，其中$\alpha_2$任意，以及任意的使原始问题有解的$S$

$$\begin{aligned}P(N-i,S)\alpha&=\begin{bmatrix}P_{11}(N-i,S) & P_{12}\\ P_{12}' & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\hat{P}(N-i,\hat{S}) & P_{12}\\ P_{12}' & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.2}$$

其中 $\hat{S}$ 具有 $P_{11}(N-1,S)$ 的形式. 所以,由于(6.1)式适用于所有的 $\hat{S}\in\mathscr{S}$,更不必说那些有 $P_{11}(N-1,S)$ 的形式,有

$$P(N-i,S)\alpha = \text{常数} \tag{6.3}$$

对于所有的 $S\in\mathscr{S}$ 和 $i\geqslant j$ 成立. 这样一来,α 就是(2.5)式的 j-常值方向.

反之,假设 α 是(2.5)式的 j-常值方向,其中 $j\geqslant 2$. 把它写成 $\alpha'=[\alpha_1'\alpha_2']$. 那么,对于任意的 $i\geqslant j$ 和 $S\in\mathscr{S}$,(6.3)式均成立. 所以,对于任意的 $i\geqslant j$ 和有着 $P_{11}(N-1,S)$ 形式的 $\hat{S}\in\mathscr{S}$,(6.1)式均成立. 根据定理 3.1,就足以证明对于所有的 $i\geqslant j$ 和所有的 $\hat{S}\geqslant\hat{S}_0$,其中 $\hat{S}_0\in\mathscr{S}$,(6.1)式均成立.

首先,我们证明: 若 $S>S_0\in\mathscr{S}$,则 $P_{11}(N-1,S)>P_{11}(N-1,S_0)$. 用反证法. 假设存在 $x\neq 0$,使得

$$P_{11}(N-1,S)x=P_{11}(N-1,S_0)x_0 \tag{6.4}$$

对于任何满足 $S_0\leqslant\bar{S}\leqslant S$ 的 $\bar{S}$ 成立,我们有

$$P_{11}(N-1,S_0)\leqslant P_{11}(N-1,\bar{S})\leqslant P_{11}(N-1,S),$$

所以

$$\begin{aligned}0&\leqslant x'[P_{11}(N-1,\bar{S})-P_{11}(N-1,S_0)]x\\&\leqslant x'[P_{11}(N-1,S)-P_{11}(N-1,S_0)]x\\&=0\end{aligned}$$

因此,对于所有的,使得 $S_0\leqslant\bar{S}\leqslant S$ 的 $\bar{S}$,就有

$$P_{11}(N-1,\bar{S})x=P_{11}(N-1,S_0)x$$

因为 $S>S_0$,类似于引理 3.2 和引理 3.3 中的论述表明: 对于任何的 $\bar{S}\geqslant S_0$,甚至 $\bar{S}\leqslant S$ 不成立,都有 $P_{11}(N-1,\bar{S})x=P_{11}(N-1,S_0)x$. 所以,根据定理3.1,对于 $i=1$ 时的(6.2)式就意味着 $[x'\ \alpha_2']'$ 是 1-常值方向,这就得出矛盾. (鉴于基的选择,所有的 1-常值方向均具有 $\alpha=[0\ \ \alpha_2']'$ 的形式).

这样一来,对于具有 $\hat{S}>\hat{S}_0$ 的 $\hat{S}_0=P_{11}(N-1,S_0)$ 和 $\hat{S}=P_{11}(N-1,S)$,(6.1)式成立. 同样,利用引理 3.2 和引理

3.3 中那样的推理可知：对于所有的 $\hat{S} \geqslant \hat{S}_0$，(6.1) 式均成立．因此，根据定理 3.1，$\alpha_1$ 就是(4.7)的 $(j-1)$-常值方向，其中 $j \geqslant 2$．引理证毕．

因此，若 1-常值方向的空间是非零的，那么，状态空间的简化过程就能进行，原来给定的问题的 j-定常方向 $(j \geqslant 2)$ 就变成降低了状态空间维数的问题的 $(j-1)$-常值方向．反复应用上述引理的结果．可以想像，通过前面两节的办法就能得到一个简化的问题．

若新的问题有着非空的 $N(\Lambda)$，那么，我们首先需要用第四节的办法消除那些多余的控制．于是，若 $\hat{I}_1 \neq \{0\}$，其中 $\hat{I}_1$ 是降低了状态空间维数的问题的 1-常值方向空间，我们就还能够按照第五节的办法进行简化．很清楚，如果在上述过程的某一阶段，对于某个简化了的问题，得到 $I_1 = \{0\}$，那么就不能再进行下去了．根据引理 6.1，这相当于在原始的问题中对于某个 l 有 $I_l = I_{l+1}$．我们将要证明：对于某个 l，$I_l = I_{l+1}$ 就意味着在原始的问题中，对于每个 $k \geqslant 2$，有 $I_l = I_{l+k}$．这就是说，再也没有消除以后的常值方向的方法，可能用另外一些不同于现在的算法．

假如说对于原始的问题，真有不是 $(l+1)$-常值方向的 $(k+l)$-常值方向，或者对于退化了的问题有不是 1-常值方向的 k-常值方向，那么，因为对于所有的 $k \geqslant 2$，$I_{l+1} \subset I_{l+k}$，我们就会只能有 $I_{l+1} \neq I_{l+k}$．由于简化的问题没有 1-常值方向，根据下面的引理就将得出这样的结论．

引理 IV.6.2 若 $I_1 = \{0\}$，则对于所有的 $k > 1$ 有 $I_k = \{0\}$．

证明 用反证法．令 j 是 $k > 1$ 中，使 $I_j \neq \{0\}$ 的最小的数值．令 $W_{(j)} = [\alpha' \beta'_{(j)}]' \in N[\Lambda_{(j)}]$，且 $\alpha \neq 0$．根据(2.12)式，有

$$\begin{bmatrix} A_{(j-1)}A & A_{(j-1)}B & B_{(j-1)} \\ B'Q_{(j-1)}A + C' & B'Q_{(j-1)}B + R & B'C_{(j-1)} \\ C'_{(j-1)}A & C'_{(j-1)}B & R_{(j-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= 0 \tag{6.5}$$

这里 $\beta_{(j)} = [\beta'\gamma']'$. 立即可以看出

$$\Lambda_{(j-1)} \begin{bmatrix} A\alpha + B\beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0.$$

若 $A\alpha + B\beta \neq 0$，就存在一个$(j-1)$-常值方向，得到矛盾。所以，$A\alpha + B\beta = 0$. 于是，$\gamma \in N[\ B'_{(j-1)}\ \ R_{(j-1)}]'$，根据附注 3.1.2，$\gamma \in N[C_{(j-1)}]$. 根据(6.5)的中间一行，就有

$$0 = B'Q_{(j-1)}[A\alpha + B\beta] + C'\alpha + R\beta + B'C_{(j-1)}\gamma = C'\alpha + R\beta.$$

这就证明了 $[\alpha'\beta']' \in N(\Lambda)$，又得到矛盾.

至此我们就完成了本节开始时所提出的要求，由逐次地除去多余的控制，和 1-常值方向，最终是对任何 i 的所有 i-常值方向都消失了. 由于这个结果的启发，显然可以得到以下的切合实际的定义.

定义 一旦 Λ 是奇异的，就称最优控制问题是奇异的. 否则是非奇异的.

关于求解奇异问题的步骤可以概述如下:

1. 确定 Λ 的零度，记为 s. 若 $[B'R]'$ 满秩，就做步骤 2. 否则，用第四节的方法消去那些不必要的控制.

2. 令 $l = \dim I_1$(即 I_1 的维数). 若 $l = 0$. 就得到非奇异问题. 若 $l > 0$，就像第五节中所叙述的，把状态空间的维数减少 l. 若 $l = n$，那么，得到一个零维的状态空间问题. 若 $l < n$，就回到步骤 1.

3. 从 1 到 2 反复进行，直至整个过程结束. 这是由上述定理保证的，而且保证最多 n 次使用 1 和 2 就能确定原始问

题的所有的常值方向.

4.确定最终的控制问题的解,再通过简化过程的逆运算,就能构造出原来给定的问题的解.

在通常的 $[A,B]$ 完全可达的情况下,不可能最后化为零维的控制问题. 这可根据简化过程中将保持完全可达性而得到.

4.7 时变问题、其他说明、结束语

在第三章里,对于连续时间的情形,详细地介绍了时变的线性二次控制问题的一些结果. 然而,为了导出这些结论,要求在所考虑的区间上具有秩的不变性. 这些假定可以当作是一种结构定常的要求.

类似的思想可以用来把第2节—6节对于常系数所得到的一些结果推广到时变的情形. 例如,假设考虑的区间是 $[M,N]$;对于每个 $i=M,\cdots,N-1$,我们可以定义矩阵 $\Lambda(i)$. 令 $s(i)$ 是 $\Lambda(i)$ 的零度,令 $W(i)$ 是 $N(\Lambda(i))$ 的基矩阵,令 $l(i)$ 是 $W(i)$ 的前 n 行的矩阵 $W_1(i)$ 的秩. 于是,为了前述降低控制和状态的维数的方法是可行的,必须要求 $s(i)$ 和 $l(i)$ 在区间 $[M,N-1]$ 上保持不变. 实质上,由于这个原因,对于时变的情形作如下定义.

定义 假定 $1\leqslant j\leqslant N-M-1$. 称 n 维向量 $\alpha(i)$ 是(2.5)式在区间 $[M,N]$ 上的 i 点处的 j-退化方向,当且仅当对于所有的 $M\leqslant i\leqslant N-j$,和所有的使(2.5)式有解的 S, $P(i,S)\alpha(i)$ 是 $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $C(\cdot)$ 和 $R(\cdot)$ 的同样的函数.

由于种种原因,我们不打算详细地讨论有关时变情形的各种结论. 首先,符号就很复杂,而且除了结构常值性的概念

以外，不需要除常值情形下所已经考虑过的那些原则以外的原则. 第二，可以贯彻的那些原则已在文献 [3] 中建立了，虽然那里仅仅是对于特殊的标量协方差的情形做的. 也许在这里值得指出：文献[3]中结构定常性条件是通过协方差所具有的，所谓确定的相对次序所给出的. 第三，研究常值方向和相应的 Riccati 方程阶数的简化的主要原因之一是节省计算量. 本文中的推导要求对状态空间和控制空间作基的变换. 对于时变的情形，这些基的变换需要对每个 $i = M, \cdots, N-1$ 来进行，所以，对于大的 $N - M$，以及当各瞬时的系数矩阵之间没有函数关系时，就可能完全失去计算上的这种好处.

其他说明

1. 若确实存在任何常值方向，就必定存在 1-常值方向. 所以，很容易根据矩阵 A 来实现对任何常值方向存在性的检验.

2. 令 α 是任何一个常值方向，令 π_1，π_2 是 Riccati 方程(2.5)的任意两个定常解，且有 $B'\pi_iB + R \geqslant 0$ 和 $N[B'\pi_iB + R] \subseteq N[A'\pi_iB + C]$. 由于对于所有的 j 和 $i = 1, 2$, $P(N-j, \pi_i) = \pi_i$，就有 $\pi_1\alpha = \pi_2\alpha$.

3. 当 $R > 0$，$C = 0$（即调节器理论和滤波理论中的一般情形），若 A 又是非奇异的，就没有常值方向.（根据对 A 的检验就很容易得出这一结论）. 另一方面，$R > 0$，$C = 0$，而 A 是奇异的，就意味着在 A 的零空间里的任意向量都是 1-常值方向（直观上很容易看出这一点；利用零控制就能使下一个状态为零）.

4. $N(A)$ 是非空的条件等价于 $R + C'(zI - A^{-1})B$ 在 $z = 0$ 点有一个传输零点[8]. 若 A 是非奇异的，这就等价于要矩阵 $R + C'(zI - A)^{-1}B$ 在 $z = 0$ 点是奇异的. 同样地，这也等价于

$$R + C'(zI - A)^{-1}B + B'(z^{-1}I - A')^{-1}C$$
$$+ B(z^{-1}I - A')^{-1}Q(zI - A)^{-1}B$$

具有这样的性质.

5. 对于某个j,所有的方向都是j-常值方向的情形是很有意思的. 设$[A_1, B]$是完全可达的,假设对于某个S,最优控制问题在$[0, 2n]$上有解,并设对于所有不是A的特征值,也不是特征值的逆的那些z值,有

$$R + C'(zI - A)^{-1}B + B'(z^{-1}I - A')^{-1}C$$
$$+ B'(z^{-1}I - A')^{-1}Q(zI - A)^{-1}B = 0$$

为了看出所有的方向都是常值方向,令 $x(n)$ 是任意确定的,$x(0) = 0$. 令 U_0^{n-1} 是使 $x(0) = 0$ 到预先规定的 $x(n)$ 的控制序列,暂时让 U_n^{2n-1} 是任意的. 由于控制问题在 $[0, 2n]$ 上有解,就可以得到

$$0 \leqslant V_{2n}[0, U_0^{2n-1}, S]$$
$$= V_n[0, U_0^{n-1}, 0] + V_n[x(n), U_n^{2n-1}, S].$$

(若不等式被破坏,那么,通过对 U_0^{2n-1} 的标定,可以使 V_{2n} 取任意大的负值). 现在假设 U_n^{2n-1} 使 $x(2n) = 0$. 对于 $K \notin [0, 2n-1]$,令 $u(K) = 0$. 利用 Parseval 定理可以计算

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [x'(K)Qx(K) + 2x'(K)Cu(K) + u'(K)Ru(K)]$$
$$= V_{2n}[0, U_0^{2n-1}, S]$$

于是,频率域性质就能给出 $V_{2n}[0, U_0^{2n-1}, S] = 0$. (在文献[9]中的定理 4 的证明里,对于连续时间的线性二次问题用到类似的论据). 因此,$V_n[x(n), U_n^{2n-1}, S]$ 达到它的下界,即 $-V_n[0, U_0^{n-1}, 0]$. 任何导致 $x(2n) = 0$ 的 U_n^{2n-1} 是最优的,而且因为 $x(n)$ 是任意的,所以所有的方向都是常值的. 附带说明一下,这就意味着(2.5)的瞬态解与最多 n 步之后的稳态解是一致的,最后,应该注意,若所有方向都是常值的,频域

的关系不一定成立.

6. 矩阵 Λ 是方的,所以如果 $N(\Lambda)$ 非空,$N(\Lambda')$ 也非空,问题在于 $N(\Lambda')$ 中的向量是否有任何意义. 容易看出,$N(\Lambda')$ 中的非零向量关系到一个对偶问题(其中 $x(i+1)=A'x(i)+Cu(i)$,且性能指标中的 C 由 B 来代替)中的 1-常值方向,但除此以外,得不到别的结果. 特别,看来不可能作出关于原控制问题的任何论断.

7. 假设对于某个 $j,\alpha,S>S_0$,有 $V_j^*[\alpha,S]=V_j^*[\alpha,S_0]$. 则 α 是 j-常值方向. 因而使 $V_j[\alpha,S]$ 最小的控制序列也使 $V_j[\alpha,S_0]$最小. 这一评注的要点是使 $V_j[\alpha,S_0]$ 最小的控制序列不一定使 $V_j[\alpha,S]$ 最小;下述例子可以证明这一点. 另一方面,如果对于某个 $\eta>0$,$V_j^*[\alpha,S_0-\eta I]$存在,使 $V_j[\alpha,S_0]$ 最小的控制序列一定最优地将 α 转变为零,由引理 3.2,这一控制序列也使 $V_j[\alpha,S]$ 最小. 作为例子,取 $A=B=C=R=1$,$Q=0$,这时

$$V_1[x(N-1),u(N-1),S]=(S+1)u^2(N-1)+2(S+1)u(N-1)x(N-1)+x^2(N-1)$$

若 $S>-1$,$u(N-1)=-x(N-1)$ 是唯一的最优控制,而若 $S=-1$,$u(N-1)$ 的任何值都是最优的. 当然,最小模值是零,如果 $x(N-1)\neq 0$,对 $S>-1$,它肯定不是最优的.

8. 对于时变的线性二次问题,所谓 Chandrasekhar 算法[5,6]在计算上是很有吸引力的. 所以,在计算方面把这一章的思想与 Chandrasekhar 算法联系起来是很有意义的. 原则上说来,显然这样的联系应该是有成果的,因为 Chandrasekhar 算法使用了 Riccati 方程解的一阶差分 $P(i+1,S)-P(i,S)$,且由于这些量有较低的秩而得到好处;线性独立的常值方向越多,一阶差分的秩越低,更仔细地考察时,应该注意把控

制降维的步骤与状态降维的步骤分开，且需要针对于各种可能的奇异性，改变文献[6]中的某些正交变换的存在性的证明方法．最后，推广到时变情形可能产生问题．

9. 在文献［4］中，有一个关于线性二次问题的"结构算法"，其中$S \geqslant 0$，且

$$\begin{bmatrix} Q & C \\ C & R \end{bmatrix} \geqslant 0$$

消去多余控制，刻画出并消去1-常值方向，由能够经过一步最优地变为零的状态来确定它们的手法与文献［4］中的手法是等价的．整个内容是平行的，文献[4]中遇到困难的地方在于必须解释非负性要求．

10. 虽然我们的讨论只限于控制问题，但正如在文献［3］中一样，可以同样好地讨论滤波理论与协方差因式分解问题，将这里的思想与文献[3]结合起来，可以容易地得到结果．

4.8 结 束 语

这一章中有两个主要的论题．第一，在最一般的线性二次控制问题的范围内讨论了常值方向的性质．最重要的常值方向，即1-常值方向由某个简单地构造出的矩阵的零空间来刻画，而所有的常值方向由产生终止于零状态的轨迹的最优控制来刻划．第二，证明了常值方向的存在性可以用来解最优控制问题．可以消去它们以得到一个低维的问题，其解连同在构造低维问题中计算过的某些量决定了原来问题的解．

附 录 IV. A

系数矩阵的定义

方程(5.8)中所用到的矩阵的定义如下；

$$\hat{A} = A_{11}$$

$$\hat{B} = [\hat{B}_1 \ \ \hat{B}_2] = [B_{12} \ \ B_{11}]$$

$$\hat{Q} = A'_{11}(Q_{12} + C_{12}Z)A_{21} + A'_{21}(Q_{12} + C_{12}Z)'A_{11} + A'_{21}(Q_{22} + C_{22}Z)A_{21} + Q_{11}$$

$$\hat{C} = [\hat{C}_1 \ \ \hat{C}_2]$$

$$\hat{C}_1 = A'_{11}(Q_{12} + C_{12}Z)B_{22} + A'_{21}(Q_{12} + C_{12}Z)'B_{12} + A'_{21}(Q_{22} + C_{22}Z)B_{22} + C_{12}$$

$$\hat{C}_2 = A'_{11}(Q_{12} + C_{12}Z)B_{21} + A'_{21}(Q_{12} + C_{12}Z)'B_{11} + A'_{21}(Q_{22} + C_{22}Z)B_{21} + C_{11}$$

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{11} & \hat{R}_{12} \\ \hat{R}'_{12} & R_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{R}_{11} = B'_{12}(Q_{12} + C_{12}Z)B_{22} + B'_{22}(Q_{12} + C_{12}Z)'B_{12} + B'_{22}(Q_{22} + C_{22}Z)B_{22} + R_{22}$$

$$\hat{R}_{12} = B'_{12}(Q_{12} + C_{12}Z)B_{21} + B'_{22}(Q_{12} + C_{12}Z)'B_{11} + B'_{22}(Q_{22} + C_{22}Z)B_{21} + R'_{12}$$

$$\hat{R}_{22} = B'_{11}(Q_{12} + C_{12}Z)B_{21} + B'_{21}(Q_{12} + C_{12}Z)'B_{11} + B'_{21}(Q_{22} + C_{22}Z)B_{21} + R_{11}$$

参 考 文 献

[1] D. Rappaport, "Constant directions of the Riccati equation", *Automatica*, Vol. 8, 1972, pp. 175—186.

[2] R. S. Bucy, D. Rappaport and L. M. Silverman, "Correlated noise filtering and invariant directions of the Riccati equation", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-15, 1970, pp. 535—540.

[3] M. Gevers and T. Kailath, "Constant, predictable and degenerate directions of the discrete-time Riccati equation", *Automatica*, Vol. 9, 1973, pp. 699—711.

[4] L. M. Silverman, "Discrete Riccati Equations", Control and Dynamic Systems, Vol. 12, ed. C. T. Leondes, Academic Press, N. Y., 1976. pp. 313—386.

[5] M. Morf, G. S. Sidhu and T. Kailath, "Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems",

IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-19, 1974, pp. 315—323.

[6] M. Morf and T. Kailath, "Square-root algorithms for least squares estimation", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-20, 1975, pp. 487—497.

[7] D. J. Clements and B. D. O. Anderson, "Linear-quadratic discrete-time control and constant directions", *Automatica,* Vol. 13, 1977, to appear.

[8] H. H. Rosenbrock, State Space and Multivariable Theory, T. Nelson and Sons, London, 1970.

[9] J. C. Willems, "Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-16, 1971, pp. 621—634.

第五章　尚未解决的问题

在前几章所讨论过的工作中还可提出许多尚待研究的问题. 至于那些前面已经提到过的，这里就不再重复了.

显然，可能有这样一个问题：如何处理一个在所考察的区间上有有限个结构变化的问题？（试图解有无限个结构变化的问题似乎有着不可克服的困难）. 结构变化相应于矩阵 P^* 在结构变化点处有一个突跳，问题在于决定结构变化点处 $P^*(\cdot)$矩阵的突跳量，或者等价地在各个区间上去匹配连接处的 $P^*(\cdot)$ 矩阵.

另一个明显地有关的问题是连接奇异与非奇异区段之间或不同的奇异区段之间的控制与轨迹的问题. 这包含着定性与定量的两个方面；文献[1]综述了某些有关的结果.

近来，"高阶"极大值原理[2]已经用于奇异问题. 将第三章中的方法与由高阶极大值原理所得到的结果紧密地连系起来是很有意义的；这里 Euler-Lagrange 方程可能起着突出的作用，近来把它们用于奇异问题的工作可能与此有关的[3].

上一章中已经显示了一般的离散时间的奇异问题中减少计算复杂性的可能性. 对于一些特殊类型的问题，有着许多计算上有效的算法，例如平方根滤波算法和第四章第 7 节中提到过的 Chandrasekhar 算法. 在这些算法与我们的算法之间建立连系是有意义的.

最后，还要提到一个几乎是逻辑上的问题. 通常一个奇异线性二次控制问题(或非负性问题)是一个非线性系统关于一个标称的控制与轨迹线性化的结果. 所以，实际上，在二阶

变分线性二次问题中，在控制与状态上均存在着约束. 显然，这将在最优控制问题中不允许出现 δ 函数（δ 函数是上界趋于无穷的连续函数的极限）. 这样，必然要问在多大程度上奇异控制的计算是有意义的. 当然，对于一个特定的问题，任何奇异的二阶变分问题的规则化（在指标泛函上加上一项 $\varepsilon u'(t)u(t)$, $\varepsilon > 0$）可以决定控制的增益，它可用来给出当初始状态有一个很小的变动时引起的最优控制的变动的近似值.

解奇异控制问题的一个方法是将它们规则化，亦即在指标泛函上加上一项 $\varepsilon u'u$，这里 $\varepsilon > 0$ 是个小量，由此得到一个其解在一定意义上接近于奇异问题的解的非奇异问题. 这样得到的非奇异问题——一个"便宜控制"问题——通常在数值计算上是病态的，在文献[4]中讨论了解这类问题的特殊方法. 讨论对奇异问题提出的简化方法，在非奇异的便宜控制问题中是否有用处，这也是有意义的.

另一个问题是对有端点约束的问题清理这里所得到的一些结果. 在终端状态只是部分地而不是完全地受约束时，鲁棒性的结论还没有充分地展开. 构造最优控制和最优性能指标的算法还没有给出，但可以肯定，可以将自由端点时的算法推广到这种情况中来.

还没有接触到的另一个领域是用半无限区间 $[t_0, \infty)$ 来代替本书中考虑的有限区间 $[t_0, t_f]$. 当然，对于定常的非奇异问题和时变的线性调节器问题有适用于半无限区间的相当广泛的理论，参看文献 [5]，它们中的许多结果不是有限区间的结果的简单推广. 由此看来研究半无限区间上的一般的奇异问题可能是有前途的.

参 考 文 献

[1] D. J. Bell and D. H. Jacobson, Singular Optimal Control Problems,

Academic Press, New York, 1975.

[2] A. J. Krener, "The high order Maximal Principle and its application to singular extremals", *SIAM J. Contr. Opt.*, Vol. 15, 1977, pp. 256—293.

[3] S. L. Campbell, "Optimal control of autonomous linear processes with singular matrices in the quadratic cost functional", *SIAM J. Contr. Opt.*, Vol. 14, 1976, pp. 1092—1106.

[4] R. E. O'Malley, "A more direct solution of the nearly singular linear regulator problem", *SIAM J. Contr. Opt.*, Vol. 14, 1976, pp. 1063—1077.

[5] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, Linear Optimal Control, Prentice Hall, New Jersey, 1971.

译 者 后 记

David. J. Clements 与 Brian D. O. Anderson 所著《奇异最优控制——线性二次问题》(“控制和信息从书的第五册)是在奇异最优控制问题上的一本重要著作. 他们用不同于别人的处理奇异最优控制的方法,考虑到线性二次问题的特点,用线性代数的方法干净、明确地给出了这一问题的解. 全书叙述与论证严谨,虽然篇幅不大但内容却相当丰富. 可以相信读者从这本书中一定会得到很多的好处.

在本书翻译的过程中,北京大学的朱照宣,叶庆凯同志阅读了译稿并提出不少有益的意见和建议. 译者对他们的帮助深致谢意.

限于译者水平, 此书的译稿可能还有不少不当乃至失误之处,特请批评指正.